

Treball de Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

**Disseny d'aplicacions per a controladors en el domini
freqüencial**

MEMÒRIA

Autor: Marc-Jun Galceran Kimura
Director: Ramon Costa-Castelló
Convocatòria: Gener 2017



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resum

En el camp de sistemes de control automàtic s'utilitzen des de fa relativament poc diverses eines informàtiques, les quals, ajuden a visualitzar, aprofundir i entendre molts conceptes que sovint en un full de paper són força més difícils d'assimilar i explicar. En aquest projecte en particular es treballarà amb el programa informàtic Sysquake que destaca per la seva capacitat de crear gràfics interactius amb elements actius i dinàmics fàcils de manipular.

L'objectiu del treball és, mitjançant aquestes aplicacions gràfiques i interactives, incentivar la curiositat i la motivació de l'estudiant envers els diferents problemes plantejats a classe i fer més propera i clara la teoria explicada.

Per preparar cadascuna de les aplicacions interactives s'han realitzat diferents tasques, principalment la de programació i disseny dels diferents gràfics. Per a cadascuna de les aplicacions s'ha redactat un document, anomenat fitxa, que a la vegada serveix també de manual per a l'usuari final. Les fitxes contenen primer de tot una breu introducció teòrica relacionada amb el concepte tractat, després, els diferents elements i gràfics que apareixen en pantalla i la seva possible manipulació. Finalment hi ha una bateria d'exemples varis, els quals, volen potenciar els coneixements obtinguts prèviament.

Sumari

RESUM	1
SUMARI	3
1. PREFACI	5
1.1. Origen del projecte	5
1.2. Motivació	5
1.3. Requeriments previs	5
2. INTRODUCCIÓ	6
2.1. Objectius del projecte	6
2.2. Abast del projecte	6
3. LA INTERACTIVITAT I LA SEVA RELLEVÀNCIA	7
3.1. La interactivitat en l'àmbit acadèmic	7
3.2. La interactivitat en la teoria de control automàtic	7
4. LA TEORIA DE SISTEMES LINEALS A L'ETSEIB: ALGUNES ASSIGNATURES	8
4.1. Les assignatures	8
5. PARAMETRITZACIÓ DE CONTROLADORS ESTABILITZANTS	9
5.1. Cas Estable	9
5.1.1. Bon Plantejament d'un sistema	15
5.1.2. Estabilitat Nominal Interna	16
5.1.3. Efectes Generals dels pols i zeros de la funció de llaç obert	19
5.1.4. Disseny basat en la Parametrització Afí	23
5.1.5. Importància de la $Q(s)$	26
6. SÍNTESIS DEL PID UTILITZANT LA PA	27
6.1. Models de plantes per a Controladors PID	27
6.1.1. Models de primer ordre estables i grau relatiu 0	28
6.1.2. Models de segon ordre estables i grau relatiu 2	29
6.2. Implementació	30
6.2.1. Funcions creades	30
6.2.2. Metodologia per dibuixar les figures	31
7. INCERTESA I ROBUSTESA	34
7.1. Incertesa multiplicativa	36
7.2. Incertesa paramètrica	37

7.3. Enfocament Clàssic	39
7.4. Estabilitat robusta i representació de la incertesa en el domini freqüencial.	40
7.5. Comportament Nominal i Robust.....	42
7.5.1. Sensibilitat de pesat.....	42
7.5.2. Comportament Nominal	43
7.5.3. Comportament Robust.....	44
7.6. Implementació.....	45
7.6.1. Funcions creades.....	45
7.6.2. Metodologia per dibuixar les figures.....	45
7.6.3. Procediment per fitar.....	47
8. LES APLICACIONS INTERACTIVES I LES FITXES	49
8.1. Procediment d'elaboració	49
8.2. La filosofia de les aplicacions.....	50
8.2.1. Les aplicacions interactives creades.....	50
8.3. Filosofia de les fitxes.....	50
9. LES FITXES	52
9.1. Parametrització afí de controladors per a plantes estables	52
9.1.1. Contingut teòric.....	52
9.1.2. Pantalla.....	55
9.1.3. Exemples	58
9.2. Incertesa i Robustesa	76
9.2.1. Contingut teòric.....	76
9.2.2. Pantalla.....	82
9.2.3. Exemples.....	84
10. ESTUDI D'IMPACTE AMBIENTAL	92
10.1. Impacte ambiental en la realització del projecte	92
10.2. Impacte ambiental en la posada en pràctica del projecte.....	92
11. ESTUDI ECONÒMIC	93
11.1. Pressupost de la realització del projecte	93
11.2. Pressupost de la posada en pràctica del projecte	94
CONCLUSIONS	96
AGRAÏMENTS	97
BIBLIOGRAFIA.....	98
Referències bibliogràfiques	98

1. Prefaci

1.1. Origen del projecte

Aquest projecte pretén continuar i millorar la feina realitzada per altres companys en treballs de convocatòries anteriors i com no, motivar a futurs estudiants a continuar en aquesta línia de la recerca i innovació constant en l'àmbit de la teoria de control. Seguint amb la mateixa metodologia es creen noves aplicacions interactives amb la finalitat d'un ús didàctic. Tots aquets projectes es poden dur a terme gràcies a la iniciativa del departament d'Enginyeria de Sistema, Automàtica i Informàtica Industrial de l'ETSEIB.

1.2. Motivació

Després del gran canvi referent als estudis universitaris que es va implantar a nivell europeu, el tan conegut "Pla Bolonya", el treball individual té cada cop més pes en l'àmbit acadèmic. Per aquesta raó, és important dotar l'estudiant d'eines informàtiques interactives.

1.3. Requeriments previs

Perquè la realització del projecte sigui enriquidora i profitosa tant per l'autor com pels usuaris finals és recomanable haver adquirit una sèrie de coneixements previs en el camp de la teoria de control i dinàmica de sistemes. En el cas d'haver cursat el Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials, aquests coneixements s'adquireixen principalment en les matèries: Dinàmica de Sistemes i Control Automàtic. El Màster Universitari en Enginyeria Industrial (MUEI) impartit a l'ETSEIB dins de l'especialitat d'automàtica també consta en el seu programa acadèmic d'assignatures impartides pel departament ESII. Tanmateix, amb la nova fornada de Màsters sorgits fa un parell d'anys a l'ETSEIB, també existeix la possibilitat de cursar el Màster Universitari en Automàtica i Robòtica (MUAR) en el qual s'aprofundeix molt més en el camp de control automàtic.

2. Introducció

2.1. Objectius del projecte

L'objectiu principal del present projecte és el disseny d'aplicacions interactives relacionades amb conceptes de sistemes de control automàtic perquè aquestes puguin ser de gran utilitat en la docència i en la recerca de la teoria de control. Cadascuna de les aplicacions fa referència a diferents conceptes però, en conjunt, ajuden a que l'usuari final pugui tenir un millor assoliment dels temes estudiats prèviament. Per tant, es vol que aquestes noves eines sorgides recentment en el temps es converteixin en un complement de gran ajuda i eficiència juntament amb material ja existent com poden ser llibres, publicacions, articles i apunts de classe.

2.2. Abast del projecte

S'elaboren dues aplicacions interactives amb la idea que s'ajustin als temaris d'algunes assignatures del departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica, i Informàtica Industrial (ESAI) impartides a l'ETSEIB, ja siguin d'algun dels màsters citats anteriorment o del grau. D'aquesta manera els estudiants disposaran d'un ventall d'eines d'aprenentatge més ampli amb el qual podran posar a prova els conceptes adquirits a classe.

Per qüestions pràctiques s'ha decidit separar la presentació i explicació dels coneixements teòrics de les fitxes a on aquests són resumits d'una manera més breu. Les fitxes s'han elaborat amb la funció que serveixin com un manual curt de cada aplicació per l'usuari i d'aquesta manera aquest pugui fer-ne un ús didàctic i amè.

3. La interactivitat i la seva rellevància

3.1. La interactivitat en l'àmbit acadèmic

En els últims anys hi ha hagut un anàlisi profund dels mètodes usats per ensenyar i aprendre la teoria de control automàtic. Aquest anàlisi ha introduït canvis en la tecnologia computacional que ens permeten ara utilitzar noves eines educatives d'alta qualitat com són les eines interactives o els laboratoris virtuals. Aquestes eines són de gran rellevància per a les classes tradicionals perquè ajuden completar les explicacions del professor, i també, com a eina d'aprenentatge autònom tant per a estudiants a distància com per a estudiants presencials. Les eines interactives, que són accessibles per als estudiants a qualsevol hora del dia, són considerades un molt bon estímul per desenvolupar la capacitat intuïtiva de l'alumne. Aquestes eines interactives ajuden a desmitificar conceptes matemàtics abstractes mitjançant la visualització d'exemples prèviament escollits.

3.2. La interactivitat en la teoria de control automàtic

Per als camps de Control automàtic i anàlisi de robustesa amb paràmetres incerts les eines interactives són extremadament útils. Aquestes permeten als estudiants explorar canvis en el funcionament d'un sistema a mesura que varien els paràmetres, i sobretot, fent això alhora que observem varis diagrames simultàniament. Gràcies al programa Sysquake tot això és possible només usant el ratolí per moure els paràmetres i els seus efectes en el sistema es veuen immediatament reflectits en totes les figures interactives.

Degut a aquest procés de millora que ha transformat la tecnologia computacional, avui és possible dissenyar eines educatives de control amb les característiques següents:

- Millor interactivitat home-màquina
- Interfícies gràfiques intuïtives i manuals
- Alt grau d'interactivitat

Els conceptes i les idees són tan riques en continguts visuals que poden ser representades intuïtivament i geomètricament. Aquest contingut visual no només pot ser utilitzat per explicar conceptes sinó també ser manipulat per resoldre problemes.

Els conceptes bàsics de control automàtic sovint provenen de situacions molt específiques i visuals. Tots els professors saben com d'útil pot arribar a ser poder explicar als estudiants els corresponents conceptes més abstractes. Una de les tasques importants dels professors és transmetre als estudiants no només l'estructura lògica i formal d'aquesta disciplina, sinó també els aspectes més intuïtius i estratègics de la matèria.

4. La teoria de sistemes lineals a l'ETSEIB: algunes assignatures

Un primer pas en l'anàlisi i el disseny de sistemes de control és el modelat matemàtic dels processos a controlar. En general, donat un procés, primer es defineix el conjunt de variables que descriuen les característiques dinàmiques d'aquest. Aquestes variables estan interrelacionades a través d'unes determinades lleis físiques, governades per unes equacions matemàtiques que descriuen la dinàmica del sistema. Depenent de la naturalesa del sistema, aquestes equacions poden ser lineals o no lineals, variants o invariants en el temps.

Per raons pràctiques, per poder establir un anàlisi aplicable i dissenyar eines pels sistemes de control, es fan suposicions i aproximacions dels sistemes físics de manera que siguin possibles d'estudiar utilitzant la teoria de sistemes lineals.

El conjunt d'aplicacions interactives desenvolupades en aquest projecte fan referència majoritàriament a conceptes relacionats amb la teoria de sistemes lineals. S'ha procurat ajustar-les als diferents temaris d'algunes de les assignatures en les que s'imparteix part d'aquesta teoria. Cada una d'aquestes assignatures forma part del Pla d'Estudis d'Enginyeria Industrial a l'ETSEIB, ja sigui com a assignatures troncales o bé com a assignatures optatives, essent aquestes últimes, incloses dins el programa de la Intensificació d'Automàtica.

4.1. Les assignatures

Dinàmica de sistemes

L'assignatura s'imparteix en el segon curs del pla d'estudis, com a assignatura troncal, amb l'objectiu de proporcionar als estudiants el concepte generalitzador de sistema dinàmic, aplicable en la pràctica totalitat de camps de l'enginyeria, i el de senyal com a variable d'aquest sistema evolucionant en el temps.

Control automàtic

L'assignatura s'imparteix en el quart curs del pla d'estudis, també com a assignatura troncal, i té com a objectiu principal el de subministrar els coneixements bàsics i necessaris en l'anàlisi i disseny de sistemes senzills de control digital. Es proporciona la base suficient per l'aprofundiment posterior en els mètodes avançats de control, així com les possibilitats i limitacions dels computadors en la seva aplicació al control de processos.

5. Parametrització de controladors estabilitzants

5.1. Cas Estable

Suposem que un sistema realimentat es pot estabilitzar. En aquest capítol, es mostrarà com parametritzar tots els controladors que fan estable un determinat sistema en llaç tancat. La parametrització de tots els controladors internament estables va ser introduïda per Youla l'any 1976 utilitzant la factorització coprime. La factorització coprime s'utilitza quan el model de la planta és inestable i per tant, en el nostre cas, no la farem servir.

Youla va presentar una nova manera d'expressar una funció de transferència d'un controlador, és a dir, una nova parametrització del controlador. La característica més destacable és que permet expressar les funcions de llaç tancat com funcions afins en la variable de disseny. Per això, es coneix com la **Parametrització Afí (PA)**. [7]

Existeixen molts mètodes per a disseny de controladors, com per exemple, assignació de pols, avanç/retard de fase (disseny en el camp freqüencial) o el lloc geomètric de les arrels. A les assignatures cursades durant el grau, dinàmica de sistemes i control automàtic, estem acostumats a treballar amb un sistema com el de la Figura 1 format per un controlador $C(s)$ i una planta estable $G(s)$.

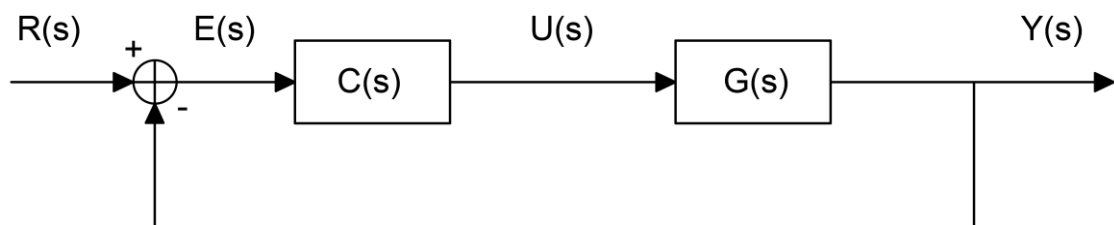


Figura 1: Diagrama de llaç tancat amb realimentació unitària

És ben conegut que pel sistema de la Figura 1, la transmitància de llaç tancat és:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

on $T(s)$ és la funció de llaç tancat, també coneguda com funció de sensibilitat complementària, que va des de la referència d'entrada $R(s)$ al senyal de sortida $Y(s)$.

A continuació es veurà una forma de descriure tots els controladors que estableixen un sistema en laç tancat compost per una planta $G(s)$ estable i un controlador $C(s)$. La característica més destacable d'aquesta parametrització és que permet expressar les funcions de laç tancat, en particular, la funció de sensibilitat complementària $T(s)$, com funcions afins en la variable de disseny.

Per aquest motiu, es coneix com la Parametrització Afí (PA), altrament coneguda com parametrització de Youla. La PA és especialment útil quan es busca optimitzar un controlador, tasca que es simplifica molt quan la funció a optimitzar depèn en forma afí del paràmetre a optimitzar. Com a punt històric, la PA va permetre en gran mesura el desenvolupament formidable de nous mètodes de control òptim en els anys 80 [7]. En la Figura 2 es representa el diagrama del sistema en laç tancat amb la parametrització afí del controlador i una planta estable. La part compresa dins de les línies discontinües fa referència al controlador $C(s)$.

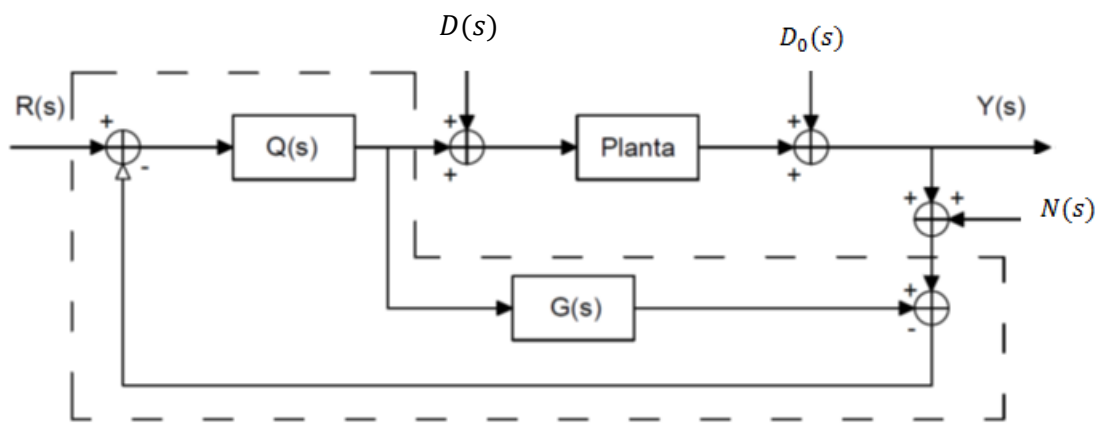


Figura 2: Parametrització de Youla de controladors per a plantes estables

Amb el sistema de la Figura 2 ja es poden definir les tres funcions de sensibilitat restants:

$$\frac{Y(s)}{D_0(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

$$\frac{U(s)}{N(s)} = S_o(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

S'observa com $S(s)$ és la funció que relaciona l'entrada de la pertorbació $D_0(s)$ amb el senyal de sortida $Y(s)$, $S_i(s)$ és la funció que relaciona l'entrada de la pertorbació $D(s)$ amb

el senyal de sortida $Y(s)$, mentre que $S_0(s)$ és la funció de llaç tancat que va des de l'entrada del soroll $N(s)$ fins al senyal de control $U(s)$. Comparant les Figures 1 i 2 es pot observar com el $C(s)$ de la Figura 1 equival a la transmitància de la zona delimitada amb línies discontinues de la Figura 2.

Tot seguit es posa de manifest la relació entre el controlador $C(s)$ i la funció de transferència $Q(s)$. El senyal de control $U(s)$ de la Figura 3 es genera a partir de la referència d'entrada $R(s)$ per la funció de transferència $Q(s)$:

$$U(s) = Q(s)R(s) \quad (\text{Eq. 1})$$

El senyal de sortida $Y(s)$ es genera a partir de la referència $U(s)$ i la planta estable $G(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)Q(s)R(s) \quad (\text{Eq. 2})$$

Finalment, la funció de transferència es defineix com:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = G(s)Q(s) \quad (\text{Eq. 3})$$

Aquesta equació és la base de la parametrització afí i d'on es dedueix la importància que la planta sigui estable.

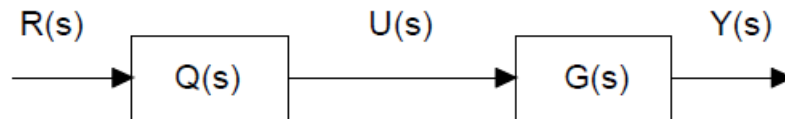


Figura 3: Control de llaç obert del sistema

S'ha vist que un sistema convencional amb realimentació, com el de la Figura 2, la seva funció de transferència de llaç tancat és:

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (\text{Eq. 4})$$

L'expressió anterior és no lineal respecte a $C(s)$. L'objectiu és mantenir la simplicitat de la (Eq. 3) en una forma més general per la realimentació. Igualant (Eq. 3) i (Eq. 4) s'obté:

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (\text{Eq. 5})$$

Finalment, aïllant $C(s)$ de la (Eq. 5) s'obté l'equació del controlador:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)} \quad (\text{Eq. 6})$$

que és la idea en que es basa la PA. Aquesta equació és coneguda com la parametrització de Youla de tots els controladors estabilitzadors i per a totes les plantes estables.

Una interpretació física simple de la parametrització (Eq. 6) es pot obtenir fent ús de les tècniques de manipulació de blocs que es mostren a continuació: **[5]**

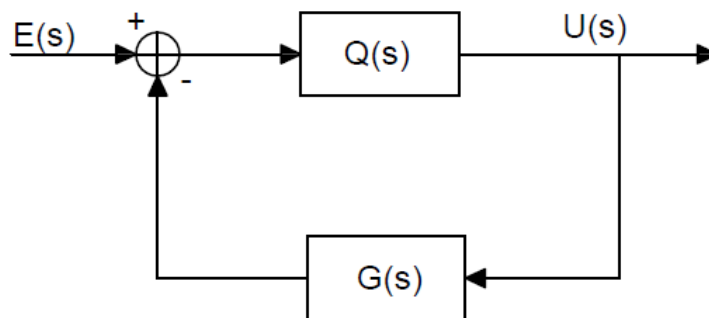


Figura 4: Parametrizació del controlador

Substituint el diagrama de la Figura 4 pel bloc de $C(s)$ de la Figura 1 resulta el diagrama de blocs següent:

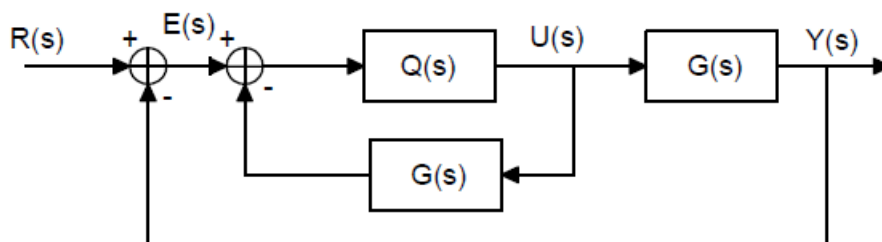


Figura 5: Interpretació física de la parametrització per a plantes estables

Finalment, manipulant els blocs d'una manera simple ens porta al diagrama de blocs de la Figura 2. D'aquest últim diagrama de blocs es veu que la parametrització aconsegueix anul·lar la planta, restant-la a la realimentació i substituint-la per qualsevol funció estable arbitrària $Q(s)$.

Acoblant el sistema de la Figura 2 en el de la Figura 1 s'obté el sistema general amb el qual es treballarà:

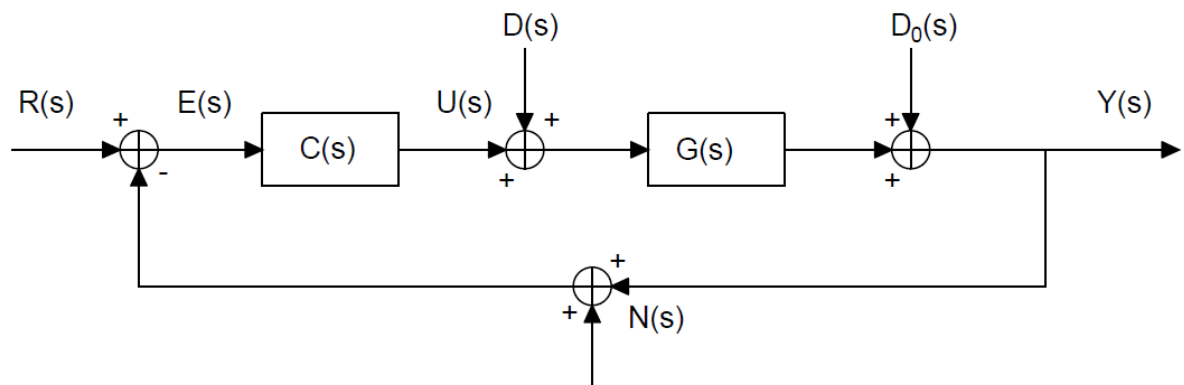


Figura 6: Diagrama de laç tancat amb perturbacions

On

- $G(s)$ és el model nominal de la planta.
- $C(s)$ és el controlador.
- $R(s)$ és la referència d'entrada.
- $D(s)$ i $D_0(s)$ són perturbacions externes.
- $N(s)$ és el soroll de mesura.
- $Y(s)$ és el senyal de sortida.
- $U(s)$ és el senyal de control.
- $E(s)$ és l'error entre el senyal de sortida i el d'entrada amb permís del soroll.

Primer s'analitza l'anomenat laç nominal, p.e. l'efecte de la interacció del controlador amb el model nominal realimentat. En la Figura 6 s'utilitzen funcions de transferència amb transformacions de Laplace per descriure les relacions entre els diferents senyals del laç.

A continuació es descriuen les relacions entre les diferents variables de la Figura 6:

$$Y(s) = G(s)U(s) + D_0(s) + G(s)D(s)$$

$$\begin{aligned} U(s) &= C(s)R(s) - C(s)Y(s) - C(s)N(s) \\ &= C(s)(R(s) - N(s) - G(s)U(s) - D_0(s) - G(s)D(s)) \end{aligned}$$

Si aïllem $U(s)$, l'equació queda:

$$U(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} (R(s) - N(s) - D_0(s) - G(s)D(s))$$

Finalment, aïllant $Y(s)$ queda:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} [G(s)C(s)(R(s) - N(s)) + D_0(s) + G(s)D(s)]$$

El sistema de llaç tancat de la Figura 6 s'anomena estructura d'un grau de llibertat perquè només hi ha un grau de llibertat per modelar les dues funcions de transferència des de la senyal d'entrada $R(s)$ i $N(s)$ fins a $Y(s)$ i des de $D_0(s)$ i $D(s)$ fins a $Y(s)$. Per tant, si la funció de transferència del controlador és dissenyat per donar una resposta a una referència d'entrada determinada; p.e.:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Això implica una única resposta de sortida

$$\frac{Y(s)}{D_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

Ara ja es poden definir les quatre funcions de sensibilitat d'un sistema SISO (Single Input Single Output) en funció de $Q(s)$.

Les quatre funcions de sensibilitat nominals de llaç tancat per a una planta nominal $G(s)$ i un controlador $C(s)$ amb realimentació unitària són les següents: **[7]**

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = Q(s)G(s) \quad (\text{Eq. 7})$$

$$\frac{Y(s)}{D_0(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} = 1 - Q(s)G(s) \quad (\text{Eq. 8})$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = [1 - Q(s)G(s)]G(s) \quad (\text{Eq. 9})$$

$$\frac{U(s)}{N(s)} = S_0(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} = Q(s) \quad (\text{Eq. 10})$$

Si les expressem en funció de la transmitància de llaç obert $L(s) = C(s)G(s)$:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \text{Funció de Sensibilitat Complementària}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{Funció de Sensibilitat}$$

$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)} \quad \text{Funció de Sensibilitat de la Pertorbació}$$

$$S_0(s) = \frac{C(s)}{1 + L(s)} \quad \text{Funció de Sensibilitat de Control}$$

Una de les implicacions importants que es deriven de les funcions de sensibilitat de llaç tancat és que tots els pols i zeros no cancel·lats de la planta imposen restriccions algebraiques i d'interpolació en les funcions de sensibilitat. Particularment, es té:

- La funció de sensibilitat complementària $T(s)$ té els zeros de $Q(s)G(s)$ tal com s'observa a la (Eq. 7).
- La funció de sensibilitat $S(s)$ és igual a 1 en tots els zeros no cancel·lats de $G(s)$. (Aquest fet deriva de la igualtat $S(s) + T(s) = 1$) que s'explicarà amb detall més endavant.
- La funció de sensibilitat complementària $T(s)$ és igual a 1 en tots els pols no cancel·lats de $G(s)$ (Aquest fet deriva de la igualtat $S(s) + T(s) = 1$).

5.1.1. Bon Plantejament d'un sistema

Considerem el sistema realimentat de la Figura 7 on els senyals d'entrada $[u_1(s), u_2(s)]$, els senyals de sortida $[y_1(s), y_2(s)]$ i els errors $[e_1(s), e_2(s)]$ satisfan les següents equacions:

$$y_1(s) = G(s)e_1(s); \quad e_1(s) = u_1(s) - y_2(s)$$

$$y_2(s) = C(s)e_2(s); \quad e_2(s) = u_2(s) + y_1(s)$$

El sistema de la Figura 7 es diu que està ben plantejat si i només si totes les funcions de transferència possibles entre senyals d'entrada i senyals de sortida existeixen i són pròpies. El bon plantejament d'un sistema evita situacions trivials dins del llaç de control. Tanmateix, és requisit indispensable per a qualsevol problema de control en el qual l'estabilitat i el seu comportament han de ser definits. Val a dir, que en situacions normals els sistemes realimentats acostumen a estar tots ben plantejats.

En un format més compacte, s'expressa la relació entre els senyals d'entrada u_i i els errors e_i com:

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C(s) \\ -G(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}$$

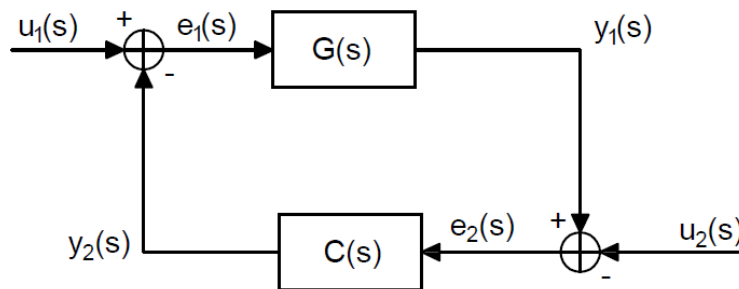


Figura 7: Llaç de realimentació per avaluar sistemes ben plantejats

Per tant, per tenir senyals de sortida ben definits, cal que existeixi la inversa de $P(s)$ i que aquesta sigui pròpia (casual). Altrament, o bé els senyals de sortida no estaran ben definits o bé podrien ser impropis (no casuals).

Exemple 1

Tenim el model d'una planta i un controlador, connectats com a la Figura 7:

$$G(s) = \frac{1-s}{2+s}, \quad C(s) = \frac{s+7}{s+5}$$

La funció de transferència entre u_2 i e_2 és:

$$[1 + C(s)G(s)]^{-1} = \frac{(s+2)(s+5)}{s+17}$$

Que és impròpia (no casual). Per tant, el llaç no està ben plantejat. Cal recordar que a la pràctica, el model de la planta és estrictament propi. En aquest cas és fàcil de veure que si el model de la planta hagués estat estrictament propi l'anterior $[1 + C(s)G(s)]^{-1}$ hagués sigut pròpia.

Resumint, les següent condicions són equivalents:

1. El sistema de la figura està ben plantejat.
2. $P(s)$ té inversa.
3. L'equació característica $1 + C(s)G(s)$ té inversa.

5.1.2. Estabilitat Nominal Interna

És ben conegut el concepte d'estabilitat d'un sistema lineal invariant en el temps descrit com funcions de transferència, entre un senyal d'entrada i un altre de sortida. Tanmateix, és important distingir entre l'estabilitat des d'un punt de vista entrada-sortida i l'estabilitat d'un

llaç realimentat.

No és difícil veure que l'estabilitat d'una certa parella entrada-sortida (tots els pols de la corresponent funció de transferència es troben en el semi pla esquerre del pla complex) no garanteix que totes les combinacions de parelles siguin estables.

Exemple 2

Consideri el llaç de control de la Figura 7 i les següents funcions de transferència per la planta i el controlador:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s-2)(s+5)}, \quad C(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

La funció de transferència entre u_1 i y_2 és:

$$T_{y_2 u_1}(s) = \frac{y_2(s)}{u_1(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s+3}{s^2 + 7s + 8}$$

que és estable. Però si es considera la funció de transferència entre $u_1(s)$ i $y_1(s)$ resulta:

$$T_{y_1 u_1}(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{(s+3)(s+1)}{(s-2)(s+5)(s+1) + (s+3)(s-2)}$$

que és inestable.

Això es deu a la cancel·lació entre el pol inestable de la planta, $s = 2$, i el zero de fase no mínima del controlador. Aquest exemple mostra que existeix diferència entre l'estabilitat d'una transmitància d'un llaç de control (estabilitat entrada-sortida) i l'estabilitat d'un llaç realimentat (estabilitat interna).

Exemple 3 [7]

Consideri les següents funcions de transferència per a la planta i el controlador:

$$G(s) = \frac{s}{(s+4)(-s+2)}, \quad C(s) = \frac{-s+2}{s}$$

S'observa que existeixen dues cancel·lacions pols-zeros a $s = 2$ i $s = 0$.

La funció de sensibilitat complementària és estable:

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{1}{s+5}$$

La funció de sensibilitat també ho és:

$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{s + 4}{s + 5}$$

Tot i així, $S_i(s)$ és inestable i $S_0(s)$ és marginalment estable

$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{s}{(-s + 2)(s + 5)}$$

$$S_0(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{(-s + 2)(s + 4)}{(s + 5)s}$$

Les funcions de sensibilitat ens diuen com les propietats del llaç tancat estan influenciades per petites variacions en el procés.

Conseqüentment,

- L'efecte del pol inestable $s = 2$ apareix en $S_i(s)$. L'entrada de la pertorbació arrossegà la sortida $Y(s)$ a ser no fitada. Aquest efecte no es pot observar amb el controlador ja que està bloquejat pel seu zero.
- L'efecte del pol inestable $s = 0$ apareix en la funció de sensibilitat de control tal que el soroll portarà la seva sortida a ser no fitada. Aquest efecte tampoc es pot observar amb el controlador ja que està bloquejat pel zero de la planta.
- L'equació característica té pols estables i marginalment estables.

$$(-s + 2)s + (s + 4)(-s + 2)s = (-s + 2)(s + 5)s$$

D'aquí es dedueix que el sistema no és internament estable.

Resumint, consideri un llaç tancat nominal com el de la Figura 7, el llaç tancat nominal és internament estable si i només si les arrels del seu polinomi característic:

$$1 + C(s)G(s) = 0$$

es troben totes en el semi-pla esquerra. A més a més, no poden haver-hi cancel·lacions de pols inestables entre el controlador i la planta.

En el següent exemple s'il·lustra com el guany de la realimentació pot variar l'estabilitat del sistema en llaç tancat.

Exemple 4

Consideri un sistema com el de la Figura 1 amb un model de la planta i controlador següent:

$$G(s) = \frac{3(-2s + 1)}{(5s + 1)(10s + 1)}, \quad C(s) = K_c$$

Com es pot observar del model de la planta, aquesta conté un zero a $s = 0,5$.

A continuació, s'estudia l'estabilitat del llaç tancat per a diferents valors de K_c que fan que el sistema passi de ser estable a ser inestable.

El sistema de llaç tancat és estable per a $K_c > 2,5$ i inestable per a $K_c < 2,5$. Per tant, el límit d'inestabilitat es troba per a $K_c = 2,5$.

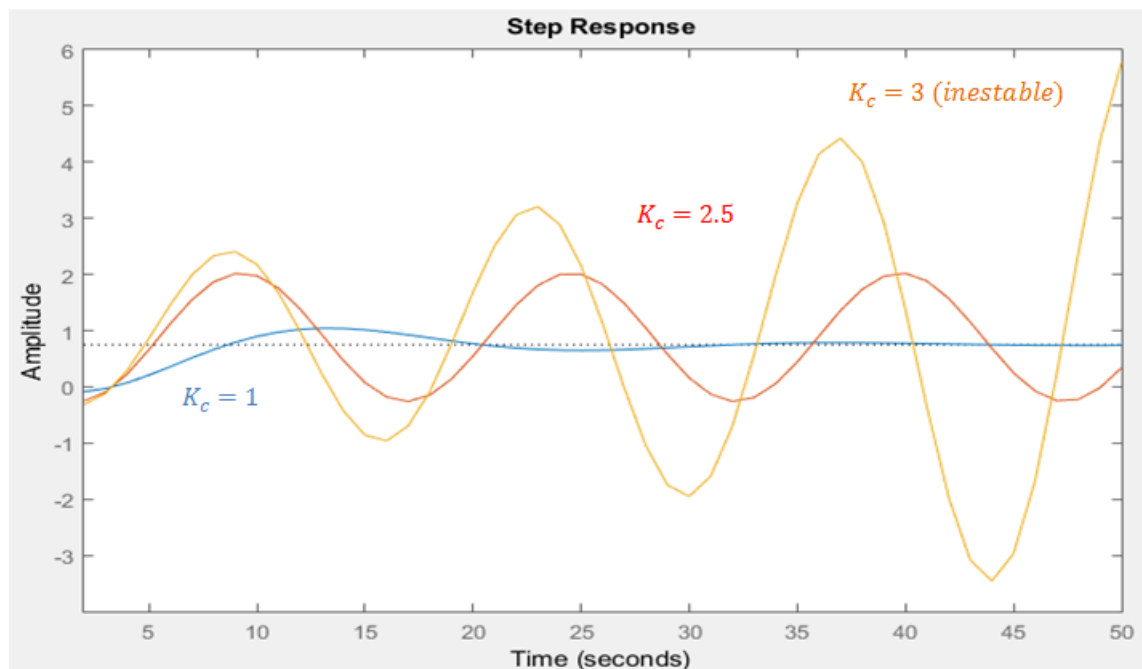


Figura 8: Efecte del controlador proporcional respecte una entrada graó unitari

5.1.3. Efectes Generals dels pols i zeros de la funció de llaç obert

Com s'ha demostrat anteriorment, per aconseguir l'estabilitat interna no es permeten cancel·lacions pols-zeros en el semi pla dret entre components del sistema com per exemple, $G(s)$ i $C(s)$. Per això, $L(s)$ tindrà un zero en el semi pla dret quan $G(s)$ també tingui un zero en el semi pla dret.

Una cancel·lació pol-zero en el semi pla dret entre dues funcions de transferència, com són $L(s)$ i $S(s)$, no necessàriament implica estabilitat interna. És només entre components físics separats (p.e. planta, controlador) quan les cancel·lacions pols-zeros en el semi pla dret no estan permeses. [6]

$$G(z) = 0 \Rightarrow L(z) = 0 \Leftrightarrow T(z) = 0, S(z) = 1$$

$$G(p) = \infty, L(p) = \infty \Leftrightarrow T(p) = 1, S(p) = 0$$

- Si la part real del pol dominant de llaç tancat és major que el zero del semi pla dret més petit, llavors un sobrepuig gran és inevitable.
- Si la part real del pol dominant de llaç tancat és major que el zero estable més petit del llaç obert, llavors hi haurà un sobrepuig significatiu. Una alternativa és cancel·lar aquests zeros en el llaç tancat col·locant-los en el denominador del controlador.
- Si la part real dels pols dominants de llaç tancat és menor que el pol de llaç obert inestable major, hi haurà un sobrepuig significatiu o l'error canviarà de signe ràpidament.
- Si la part real dels pols dominants de llaç tancat és major que el pol estable de llaç obert més petit, hi haurà un sobrepuig. Això es pot evitar cancel·lant aquests pols en la funció de llaç tancat tot col·locant-los en el denominador del controlador.

Exemple 5

Consideri la planta nominal i el controlador següent:

$$G(s) = \frac{s-a}{s(s-b)}, \quad C(s) = k \frac{s-c}{s(s-d)}$$

Si s'assignen els pols de llaç tancat com $\{-1, -1, -1\}$:

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
	$b = -0.2$	$b = -0.5$	$b = -0.5$	$b = 0.2$	$b = 0.5$
	$a = -0.5$	$a = -0.1$	$a = 0.5$	$a = 0.5$	$a = 0.2$
k	1.47	20.63	-3.75	-18.8	32.5
d	-1.33	18.13	-6.25	-22	29
c	-1.36	-0.48	-0.53	-0.11	0.15

Taula 1: Descripció dels casos

S'han considerat cinc casos diferents amb una referència d'entrada graó unitari. Els resultats es mostren en la Taula 1 i Figura 9.

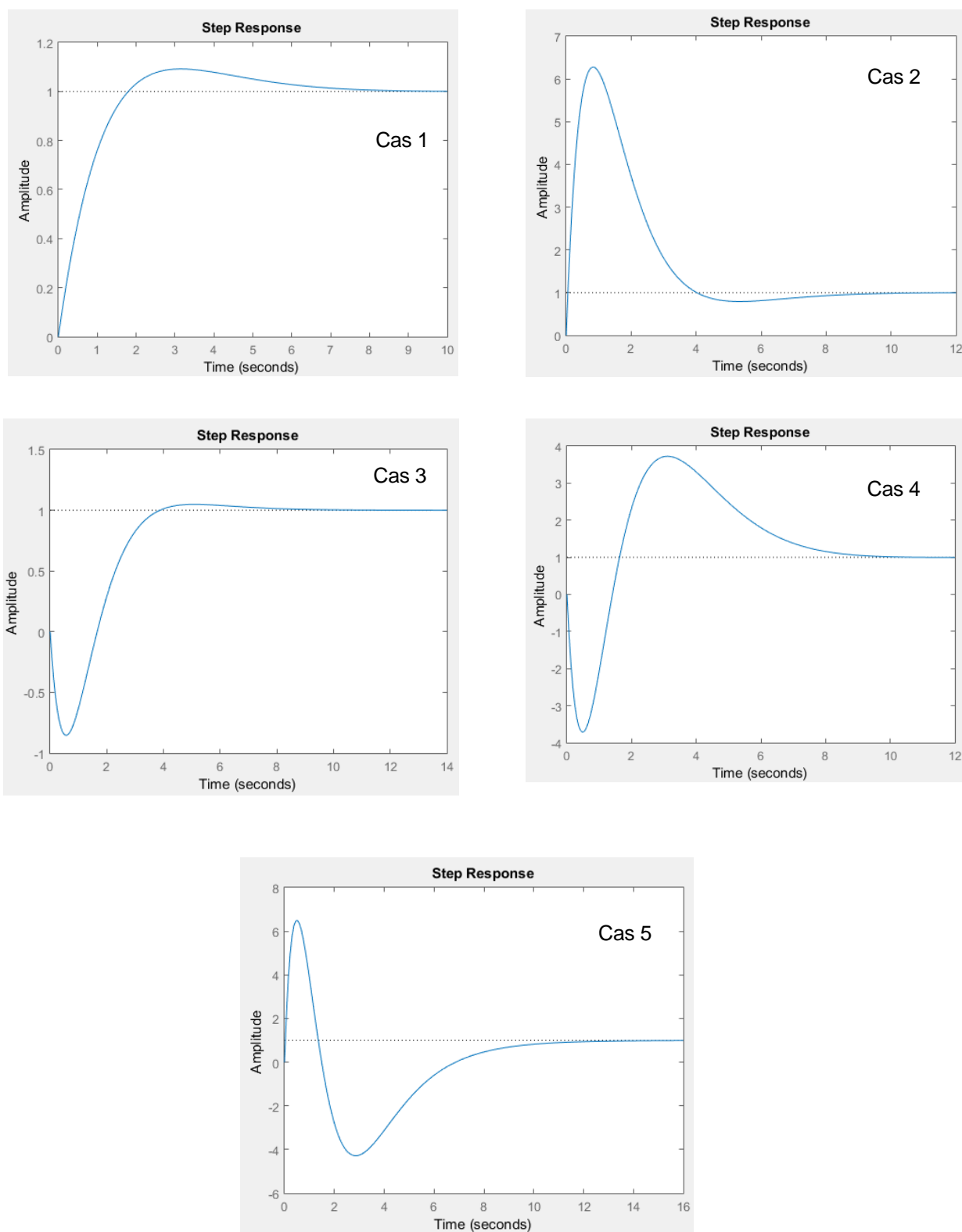


Figura 9: Resposta temporal $y(t)$ a una entrada graó unitari

1. Cas 1: (pol petit estable) Existeix un petit sobrepuig positiu previst dels punts esmentats anteriorment.
2. Cas 2: (zero estable molt petit) Aquí veiem una gran sobrepuig positiu.
3. Cas 3: (zero inestable, pol estable) S'observa un gran sobrepuig negatiu. Això es deu al zero del semi pla dret. També s'observa un petit sobrepuig positiu provocat pel pol estable a $s = -0.5$.
4. Cas 4: (zero inestable, pol inestable petit) Primer de tot, s'observa un gran sobrepuig negatiu provocat pel zero amb part real positiva. També es veu un sobrepuig positiu significatiu, el qual és provocat pel pol inestable.
5. Cas 5: (zero inestable petit, pol estable gran) Aquí el sobrepuig negatiu es produeix a causa del zero amb part real positiva i el sobrepuig positiu a causa del pol amb part real positiva. En aquests cas, el sobrepuig positiu és força major que en el cas 4 perquè la part real positiva del pol inestable té un valor molt més elevat.

Exemple 6

Consideri la funció de sensibilitat complementària següent:

$$T(s) = \frac{100s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

S'observa que els pols de laç tancat són tots iguals i de valor -1, mentre que els zeros valen $\pm j0.1$. Per calcular l'error primer es troba $S(s)$:

$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{s^3 - 97s^2 + 3s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

L'expressió de l'error és:

$$E(s) = S(s)R(s)$$

La resposta de $e(t)$ per a una entrada graó unitari es mostra a la Figura 10.

S'observa com el valor màxim de l'error correspon a més d'un 2000% de sobrepuig negatiu i 800% de sobrepuig positiu.

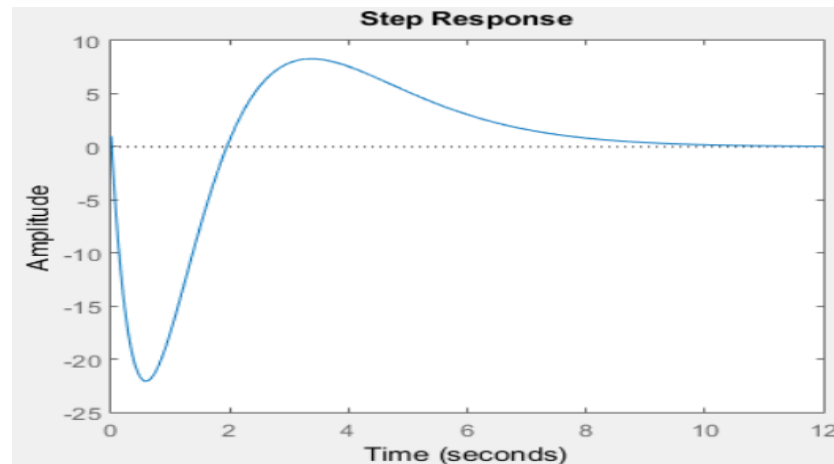


Figura 10: Resposta temporal de l'error

Extrapolant el concepte d'estabilitat interna a parametritzacions afins per a sistemes estables: el llaç nominal és internament estable si i només si $Q(s)$ és qualsevol funció estable i pròpia quan la funció de transferència del controlador $C(s)$ es parametritza com en la (Eq. 6). A més a més, no poden haver-hi cancel·lacions de pols inestables entre el controlador i la planta.

Un cop definida la relació entre el controlador $C(s)$, $Q(s)$ i la planta $G(s)$ amb la (Eq. 6), es treballarà a partir d'ara amb $Q(s)$ com a variable de disseny ja que modificant els paràmetres de $Q(s)$, $C(s)$ queda totalment definida. La planta $G(s)$ ve donada pel model.

Recordem que en aquest treball es treballarà només amb sistemes lineals "Single Input Single Output" (SISO) ja que els sistemes "Multiple Input Multiple Output" (MIMO) requereixen d'un anàlisi molt més complex.

5.1.4. Disseny basat en la Parametrització Afí

Donat un model nominal $G(s)$, com ha de ser $C(s)$ per produir un llaç tancat estable? Aquesta qüestió aparentment molt difícil de respondre en base a $C(s)$, es resolt simplement en termes de $Q(s)$ sense oblidar que $Q(s)$ ha de ser estable. La funció de llaç tancat és $T(s) = Q(s)G(s)$. Per tant si $G(s)$ i $Q(s)$ són estables, $T(s)$ és estable.

Sigui un sistema amb un model nominal estable $G(s)$ controlat en una estructura en realimentació amb un controlador $C(s)$ propi. Llavors, el llaç nominal és internament estable si i només si $C(s)$ pot expressar-se de la forma (Eq. 6) on $Q(s)$ és una funció de transferència estable i pròpia. L'estabilitat interna del llaç es dona si les quatre funcions de sensibilitat $T(s)$, $S(s)$, $S_i(s)$, $S_0(s)$ són estables. Es treballarà principalment amb les primeres dues que són les més rellevants. [5]

Sensors [6]

Els sensors són una part crucial de qualsevol sistema de control, ja que proporcionen la informació necessària en la qual l'acció del controlador es basa. Per tant, qualsevol error o un defecte significant en la mesura del sistema pot tenir un impacte significant en el seu funcionament.

Com la planta és estable i pròpia, les quatre funcions de sensibilitat també ho seran si i només si $Q(s)$ ho és. Per tant, tindrem la garantia que el llaç tancat serà estable per qualsevol $Q(s)$ que col·loquem independentment de la planta, sempre i quan aquesta també sigui estable. El controlador escrit en termes de $Q(s)$ és el representat anteriorment a la Figura 2.

Soroll

Un dels problemes més comuns és la mesura del soroll. L'efecte de mesurament del soroll en el llaç nominal ve donat per:

$$Y(s) = -T(s)N(s) \quad (\text{Eq. 11})$$

$$U(s) = -S_0(s)N(s) = Q(s)N(s) \quad (\text{Eq. 12})$$

On $Y(s)$ i $U(s)$ són respectivament el senyal de sortida de la planta i el senyal de sortida del controlador. De la (Eq. 11) es pot deduir que l'efecte del soroll pot ser reduït si $|T(j\omega)|$ és petit en la regió on $|N(j\omega)|$ és significant. Per tant, el fet que el soroll sigui típicament dominat per freqüències altes pot ser relatiu en alguns casos.

Una condició típica és que $|S(j\omega)|$ sigui petit per a baixes freqüències i després tendeixi a 1 per a altes freqüències i $|T(j\omega)|$ decreixi per altes freqüències, fet que és normalment requerit per assegurar-se que el soroll d'alta freqüència sigui rebutjat per al llaç de control i per proveir robustesa al modelat d'errors. [5]

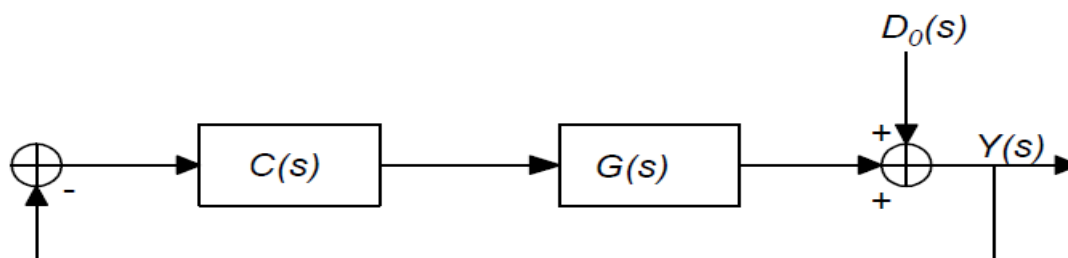


Figura 11: Llaç realimentat amb senyal de pertorbació

Consideri el diagrama de blocs de la Figura 11 amb el senyal de sortida $Y(s) = S(s)D_0(s) = [1 + G(s)C(s)]^{-1}D_0(s)$. Si l'objectiu del comportament del sistema és minimitzar l'efecte de la pertorbació $D_0(s)$ respecte el senyal de sortida $Y(s)$, és recomanable dissenyar un controlador estabilitzant que faci $S(s)$ tan petit com sigui possible. La solució trivial seria $C(s) \rightarrow \infty$, per tal que $S(s) \rightarrow 0$ però llavors no hi hauria garantia que hi hagués estabilitat nominal. A més a més, una condició fonamental de qualsevol llaç realimentat és l'equació $S(s) + T(s) = 1$. Per tant, en aquest cas tindríem $T(s) \rightarrow 1$ per a totes les freqüències. Això implica que només es pot garantir l'estabilitat robusta si i només si el model de la planta té menys d'un 100% d'error per a totes les freqüències.

Conseqüentment, es necessita trobar un controlador que faci $S(s)$ petita en un cert rang de freqüències d'interès.

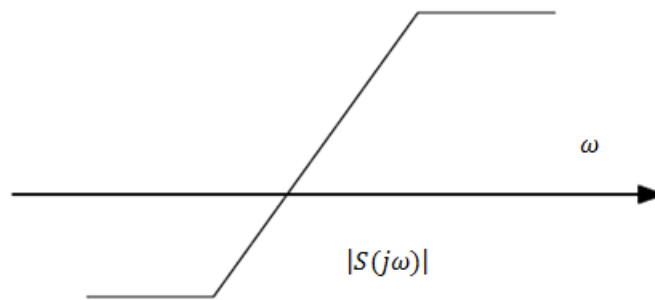


Figura 12: Distribució de la freqüència desitjada per $S(s)$

També, podrien sorgir situacions a on ja hi hagués un cert coneixement previ del rang de freqüències de la pertorbació. El rang de freqüències on $S(s)$ ha de ser petita o el rang de freqüències de la pertorbació es poden representar mitjançant les funcions de pesat W_y i W_d , respectivament. Si incorporem aquestes dues funcions en el diagrama de blocs de la Figura 13 el nou diagrama del sistema queda:

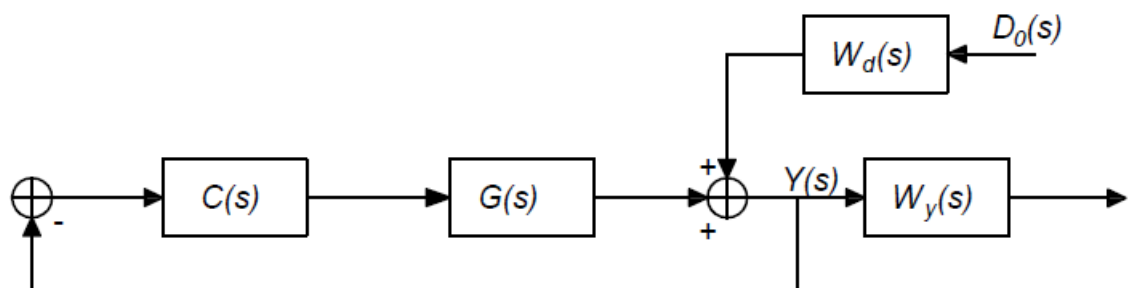


Figura 13: Llaç realimentat amb les funcions de pesat

5.1.5. Importància de la $Q(s)$

De (Eq. 3) i (Eq. 10), es veu com amb una elecció encertada de $Q(s)$ es pot construir una de les quatre funcions de sensibilitat. Les tres restants quedaran especificades amb aquesta elecció. Una elecció raonable per $Q(s)$ és:

$$Q(s) = F(s)[G(s)]^{-1} \quad (\text{Eq. 13})$$

On $[G(s)]^{-1}$ és exactament la inversa del model de la planta $G(s)$. La funció de transferència $F(s)$ és la responsable del disseny del controlador. Per tant, aquesta última és la que s'haurà de modificar perquè satisfaci les condicions establertes.

Observant l'exemple següent ho veurem més clar.

Exemple 7

Es vol obtenir una funció de transferència de llaç tancat de primer ordre.

Sigui la planta:

$$G(s) = \frac{1}{s + 7,8}$$

Per obtenir la $Q(s)$ s'utilitza la (Eq. 13):

$$Q(s) = F(s)[G(s)]^{-1} = \frac{1}{s + 2} \frac{s + 7,8}{1} = \frac{s + 7,8}{s + 2}$$

D'aquesta manera la funció de transferència de llaç tancat queda:

$$T(s) = G(s)Q(s) = \frac{1}{s + 7,8} \frac{s + 7,8}{s + 2} = \frac{1}{s + 2}$$

S'observa que la funció de disseny $F(s)$ és la mateixa que $T(s)$.

6. Síntesis del PID utilitzant la PA

En aquest capítol es presenta una aplicació de la PA per a desenvolupar mètodes d'ajustos per a controladors PI i PID quan totes les plantes són estables. El disseny del PID és possible seleccionant una $Q(s)$ desitjada, fet que no és sorpresa ja que la Figura 2 cobreix tots els controladors per una planta estable en llaç obert i ha d'incloure l'arquitectura del PID quan sigui aplicat a una planta estable.

La parametrització de controladors estabilitzants dona una solució al problema de síntesis de controladors lineals invariants en el temps, també coneguts com LTI (Linear Time Invariant). Un cop garantida l'estabilitat del llaç tancat, el controlador es pot complementar amb altres elements per tal d'assolir altres característiques tant en el domini temporal com en el freqüencial.

L'aplicació de la parametrització afi a la síntesis de controladors PID fa l'ajust particularment senzill en el cas de plantes estables de llaç obert. Cal tenir en compte que amb la parametrització no és trivial imposar una estructura tipus PID.

Es poden ajustar PIDs utilitzant $Q(s)$ ja que la parametrització afi caracteritza la família de tots els controladors estabilitzants d'un model nominal $G(s)$. Per tant, si existeix un controlador PID que estabilitzi $G(s)$, aquest estarà inclòs en la família i estarà caracteritzat per $Q(s)$.

6.1. Models de plantes per a Controladors PID

Considerem els següents models de plantes estables:

$$G(s) = \frac{k_0}{\tau_0 s + 1}; \tau_0 \in \mathbf{R}^+ \quad \text{Primer ordre, grau relatiu 1} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$G(s) = \frac{k_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}; 0 < \xi < 1; \xi \in \mathbf{R}^+ \quad \text{Segon ordre, grau relatiu 2} \quad (\text{Eq. 15})$$

$$G(s) = \frac{k_0(b_0 + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}; b_0 > 0; b_0 \in \mathbf{R}^+ \quad \text{Segon ordre, grau relatiu 1} \quad (\text{Eq. 16})$$

$$G(s) = \frac{k_0(-b_0 + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}; b_0 > 0; b_0 \in \mathbf{R}^+ \quad \text{Segon ordre, fase no mínima} \quad (\text{Eq. 17})$$

Els coeficients dels models anteriors es suposen sempre positius.

6.1.1. Models de primer ordre estables i grau relatiu 0

Donat que la planta és de fase mínima, es pot invertir exactament $G(s)$ per construir $Q(s)$. Per satisfer el requeriment de grau relatiu 0 es proposa un filtre de primer ordre i grau relatiu 1 perquè ha de ser bipròpia.

$$[G(s)]^{-1} = \frac{\tau_0 s + 1}{k_0}, \quad F(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}$$

Així obtenim:

$$Q(s) = F(s)[G(s)]^{-1} = \frac{\tau_0 s + 1}{k_0(\alpha s + 1)}$$

I el controlador obtingut a partir de la $Q(s)$ és:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)} = \frac{\tau_0 s + 1}{k_0 \alpha s} = \frac{\tau_0}{k_0 \alpha} + \frac{1}{k_0 \alpha s}$$

Que és un controlador PI amb guanys paral·lels

$$k_p = \frac{\tau_0}{k_0 \alpha}, \quad k_i = \frac{1}{k_0 \alpha} \quad (\text{Eq. 18})$$

Amb aquests paràmetres del controlador, la funció de llaç tancat queda:

$$T(s) = Q(s)G(s) = F(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}$$

On α és un paràmetre ajustable. Per valors de α petits, el llaç és més ràpid i per valors de α grans, el llaç és més lent.

Amb aquest controlador les pertorbacions de sortida són rebutjades amb la funció de sensibilitat:

$$S(s) = 1 - T(s) = 1 - F(s) = \frac{\alpha s}{\alpha s + 1}$$

Un cop més, escollint una α petita les pertorbacions de sortida són rebutjades més ràpidament que per a valors de α grans. La relació (Eq. 18) ens dona un mètode per a dissenyar un controlador PI ajustant únicament un paràmetre, α . A més a més, la parametrització dels guanys permet implementar un controlador PI auto ajustable, en cas que els paràmetres del sistema variïn amb el temps de forma coneguda, $k_0(t)$, $\tau_0(t)$ ja que k_p i k_i són expressions explícites expressades en termes d'aquests valors.

6.1.2. Models de segon ordre estables i grau relatiu 2

Consideri el disseny del controlador PID per a models de segon ordre. S'assumirà que la planta és estable i està ben esmorteïda, és a dir, per a valors del factor d'esmorteïment majors que 0,6.

Consideri un model de grau relatiu 2 expressat com la (Eq. 15):

$$[G(s)]^{-1} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{k_0}, \quad F(s) = \frac{1}{\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + 1}$$

Llavors, el controlador amb realimentació unitària ve donat per:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)} = \frac{F(s)[G(s)]^{-1}}{1 - F(s)[G(s)]^{-1}} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{k_0(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s)}$$

que és un controlador PID amb els guanys següents:

$$k_p = \frac{2\xi\omega_n\alpha_1 - \alpha_2\omega_n^2}{k_0\alpha_1^2}; \quad k_i = \frac{\omega_n^2}{k_0\alpha_1}; \quad k_d = \frac{\alpha_1^2 - 2\xi\omega_n\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2\omega_n^2}{k_0\alpha_1^3}; \quad \tau_d = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Expressions similars poden obtenir-se per a models de segon ordre amb grau relatiu 1 (Eq. 16):

$$[G(s)]^{-1} = \frac{k_0(b_0 s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad F(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}$$

Comparant la PA amb les tècniques clàssiques d'ajust de controladors PID, aquest model té bastantes més avantatges.

En aquest treball no es tractaran, però cal esmentar també l'existència de la parametrització afí per a sistemes amb retard, amb pols no desitjats en llaç tancat i per casos inestables.

6.2. Implementació

6.2.1. Funcions creades

A continuació s'expliquen amb detall les funcions creades en aquesta aplicació:

- *show_transmitanciaCs(Dades_sistema)*
Aquesta funció representa la funció de transferència del controlador $C(s)$ a dalt a la dreta de la interfície. Per dibuixar-la es crida la funció “*dibujar_funcion_transferencia*” de la llibreria gràfica, la qual utilitza el llenguatge MathML, l'objectiu del qual és expressar la notació matemàtica correctament.
- *(Dades_sistema)=Parameters(Dades_sistema)*
La funció *Parameters* serveix per dibuixar els dos sliders dels guanys de la planta $G(s)$ i la funció de transferència reguladora de $C(s)$, $Q(s)$, que són respectivament k_g i k_q . Per representar els sliders s'ha utilitzat la funció *slider* que ve per defecte en el programa Sysquake. A més a més, per dibuixar les lletres en sí s'ha utilitzat el llenguatge de programació MathML (Mathematical Markup Language). Aquest és un llenguatge de marcatge basat en XML, l'objectiu del qual és expressar la notació matemàtica amb l'objectiu que distintes màquines que utilitzin diferents llenguatges de programació puguin entendre-la. El suport de MathML és força gran en programes matemàtics com Maple o Mathcad.
- *(Dades_sistema)=Parameters_window_textedit(Dades_sistema,colors)*
Aquesta funció dibuixa els dos quadradets blancs a la part dreta dels sliders amb el valor del guany dintre del quadre. S'utilitza la funció *textfield* per a dibuixar els quadres i posteriorment se li afegeixen els valors dels guanys i també la seva interactivitat.
- *(N,D)=num_den_Gs (Dades_sistema)*
Funció que retorna el numerador (N) i el denominador (D) de la funció de transferència de la planta nominal $G(s)$.
- *(N,D)=num_den_Qs (Dades_sistema)*
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de transferència de la funció $Q(s)$.

- $(N,D)=num_den_Cs$ (*Dades_sistema*)
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de transferència del controlador $C(s)$.
- $(N,D)=num_den_Ls$ (*Dades_sistema*)
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de transferència de laç obert $L(s)$.
- $(N,D)=num_den_Ss$ (*Dades_sistema*)
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de sensibilitat $S(s)$.
- $(N,D)=num_den_Ts$ (*Dades_sistema*)
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de transferència de laç tancat $T(s)$.

6.2.2. Metodologia per dibuixar les figures

A diferència d'altres programes matemàtics com el Matlab o Maple, Sysquake té una eina molt potent que és la possibilitat d'afegir interactivitat en les figures que es representen. Tot seguit, s'explica quina metodologia s'ha seguit per programar les figures de l'aplicació que es veuen per pantalla. Els diagrames de Bode o de Nyquist ja tenen funcions predeterminades per dibuixar-les però es posarà èmfasi en la part d'interactivitat entre les diferents figures.

Representació de pols i zeros

Com que es tracta d'un sistema de temps continu, el gràfic treballa en el pla s . Es visualitzen els pols i zeros de la planta $G(s)$, els de la transmitància que regula el controlador, $Q(s)$, i els del controlador $C(s)$. El color dels pols i zeros són coherents amb el color de la seva funció de transferència dibuixada a la part de dalt de la figura. Els valors dels pols i zeros són part de la variable *Dades_sistema* i per tant és l'usuari qui els triar segons el seu criteri i conveniència.

- *poly*: retorna el polinomi les arrels del qual són els pols/zeros del sistema.
- *movezero*: canvia la posició d'un zero real o complex en un polinomi de coeficients reals. En aquest cas, canvia la posició dels pols/zeros del polinomi que retorna la funció *poly* i retorna un nou polinomi del qual els seus pols/zeros tenen unes noves posicions.
- *roots*: calcula les arrels del polinomi que retorna la funció *movezero*, és a dir, calcula les noves posicions dels pols/zeros.

Diagrama de Bode de la funció de llaç tancat $T(s)$ (Guany)

S'utilitzen les funcions *num_den_Ts* i *bodemag*. Aquesta última agafa el numerador i denominador que retorna la funció *num_den_Ts* i dibuixa la corba de guany. A banda de les corbes de guany, també es visualitzen els pols i zeros de $G(s)$ i $Q(s)$. Els pols i zeros es representen segons el seu valor absolut sobre l'origen de l'eix d'abscisses. Els seus valors concorden amb l'eix logarítmic.

Diagrama de Bode de la funció de llaç tancat $T(s)$ (Fase)

S'utilitzen les funcions *num_den_Ts* i *bodephase*. Aquesta última agafa el numerador i denominador que retorna la funció *num_den_Ts* i dibuixa la corba de fase. A banda de les corbes de guany, també es visualitzen els pols i zeros de $G(s)$ i $Q(s)$. Els pols i zeros es representen segons el seu valor absolut sobre l'origen de l'eix d'abscisses. Els seus valors concorden amb l'eix logarítmic.

Diagrama de Bode de la funció de sensibilitat $S(s)$ (Guany)

S'utilitzen les funcions *num_den_Ss* i *bodemag*. Aquesta última agafa el numerador i denominador que retorna la funció *num_den_Ss* i dibuixa la corba de guany.

Diagrama de Bode de la funció de sensibilitat $S(s)$ (Fase)

S'utilitzen les funcions *num_den_Ss* i *bodephase*. Aquesta última agafa el numerador i denominador que retorna la funció *num_den_Ss* i dibuixa la corba de fase.

Diagrama de Nyquist

Per realitzar aquest anàlisi, s'utilitza el Criteri d'estabilitat de Nyquist. Aquest criteri proporciona informació de l'estabilitat en llaç tancat a partir de la resposta freqüencial de llaç obert. Es tracta, doncs, d'observar el comportament de la traça de Nyquist de llaç obert respecte al punt $-1 + j0$, anomenat punt crític.

Per tal d'estudiar quina és la distància al punt -1 (punt crític) al diagrama de Nyquist, s'introdueixen dos conceptes importants anomenats marge de guany i marge de fase, els quals indiquen el grau d'estabilitat del sistema. A continuació, s'explica el significat de tots dos conceptes:

- Marge de guany K_g :

$$K_g = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}$$

On $L(j\omega_p)$ és la funció de llaç obert i ω_p s'anomena freqüència d'encreuament de fase, és a dir, freqüència a la qual l'angle de fase de la funció de transferència en llaç obert és igual a -180° . En altres paraules, és la freqüència que té lloc a l'encreuament de fase, que és el punt en el qual la traça de $L(j\omega_p)$ interseca amb l'eix real negatiu.

En termes de decibels,

$$K_g(dB) = 20 \cdot \log K_g = -20 \log(|L(j\omega)|)$$

- Marge de fase, γ

És la quantitat d'endarreriment de fase addicional a la freqüència d'encreuament de guany que es requereix per portar el sistema al límit de l'estabilitat. La freqüència d'encreuament de guany, ω_g , és la freqüència a la qual el guany de la funció de transferència en llaç obert és unitari. És a dir, quan es compleix $|L(j\omega_g)| = 1$

L'expressió del marge de fase és:

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

On ϕ és l'angle de fase de $L(j\omega)$ a la freqüència ω_g .

Per a que el sistema sigui estable, tant el marge de guany com el marge de fase han de ser positius.

Diagrama de la Resposta temporal de llaç tancat

En aquesta figura es representa la resposta temporal del sistema en llaç tancat en funció del temps, incloent-hi la pertorbació i el soroll. Per a cada entrada, hi figura una línia amb un petit cercle al final, amb el qual es pot regular l'amplitud d'aquella entrada arrossegant-lo verticalment. El valor de l'amplitud concorda amb el valor de l'eix d'ordenades. En el cas de la referència d'entrada aquesta línia es troba a l'eix d'ordenades. En el cas de la pertorbació la línia és de color verd i es troba al cap d'un segons. Pel que fa el temps d'entrada de la pertorbació i el soroll també es pot regular arrossegant el cercle de sota horitzontalment.

7. Incertesa i Robustesa

En aquest capítol es tracten els conceptes d'estabilitat nominal i robusta, així com els problemes en el comportament de sistemes SISO representats per funcions de transferència. L'anàlisi es dur a terme procedint des de l'estabilitat del model nominal de la planta fins l'objectiu final del control robust: el bon comportament en sistemes robustos.

Moltes tècniques sovint utilitzades per al disseny de controladors giren en l'entorn de l'ús de models lineals i invariants en el temps, els anomenats LTI (Linear Time Invariant). El resultat és l'obtenció d'un sol candidat de controlador amb els seus ajustos corresponents per a una realimentació determinada. Tanmateix, és important adonar-se que els processos reals acostumen a ser no lineals i aquests models no lineals són linealitzats per a que puguin ser utilitzats en mètodes de disseny lineal. Per tant, els models lineals són acurats només al voltant de la referència escollida per a la linealització. Encara que un model lineal podria representar un procés bastant acurat, els paràmetres del model podrien ser variants en el temps i també variar a causa dels canvis en les condicions operatives. Per aquesta raó, la planta real sempre diferirà del model que s'utilitzi en el disseny del sistema de control, doncs aquest inclourà un error a causa del procés de modelat.

És important assumir l'existència d'incertesa o discrepàncies entre la planta real i el model matemàtic per controlar de forma eficient un procés i incloure-ho en el procés de disseny del sistema de control. Aquests tipus de sistemes de control s'anomenen Control Robust.

El Control Robust considera les incerteses que es presenten en un sistema amb la finalitat de respondre de manera òptima. El sistema de control dissenyat basat en el control robust funcionarà adequadament quan s'utilitzi amb la planta real.

Tot seguit es presenten dos conceptes que estan relacionats entre ells i que es consideren de vital importància en el control robust.

Robustesa: un sistema de control és robust si és insensible a les diferències entre el model real i el model matemàtic que cal fer servir per a dissenyar el controlador.

Incertesa: és el conjunt de discrepàncies entre el model matemàtic i el sistema real.

El problema és determinar alguna manera de descriure totes aquestes incerteses de manera que puguin tenir-se en compte en el disseny de controladors i el seu posterior anàlisi.

Això es pot fer imposant:

- Límits en els paràmetres de models lineals.
- Límits a no linealitats.
- Límits en la resposta freqüencial.

En aquest projecte s'assumirà que el comportament dinàmic d'un procés està descrit, no per un model lineal invariant en el temps, sinó per un conjunt de models lineals invariants en el temps. Les característiques dels models estan expressades en termes de la seva resposta freqüencial i això permet als comportaments dinàmics ser descrits convenientment.

A continuació es descriuen les causes més comunes d'un model incert:

1. Incertesa en els paràmetres: sempre hi ha paràmetres en models lineals, els quals són aproximats o simplement erronis.
2. Dinàmiques no contemplades en el model: tots els models físics tenen imperfeccions. Aquest fet pot incrementar l'error quan es manipulen certs "inputs".
3. No linealitats: els paràmetres en models lineals poden variar a causa de no linealitats o canvis en les condicions d'operació.
4. Fins i tot quan està disponible un model súper detallat, a vegades s'haurà de treballar amb un model més simple (d'ordre baix) i representar les dinàmiques descuidades com a incertes.

Es representa el sistema no com un model simple $G(s)$, sinó com un conjunt de models que engloba tots els possibles models dintre d'una descripció d'incertesa.

Descripció de les incerteses segons el seu origen:

- Estructurals
 - Canvi de punt de treball.
 - Dinàmica no lineal.
 - Dinàmica depreciada o no modelada .
- Paramètriques
 - Paràmetres no identificats amb precisió.
 - Modificació del punt d'operació.
 - Deteriorament del sistema.

Normalment, es considera més important estudiar el tipus d'incertesa no estructurada. La incertesa estructurada es considera més difícil de resoldre amb tècniques tradicionals i s'acostuma a transformar en incertesa no estructurada per tal que pugui ser manipulada

amb tècniques estàndards. En aquest treball, s'estudiaran els dos tipus i més específicament: la incertesa multiplicativa i la incertesa paramètrica.

A continuació es defineixen quatre conceptes bàsics per estudiar el control robust:

- **Estabilitat Nominal (EN):** un sistema és estable sense model d'incertesa.
- **Comportament Nominal (CN):** el sistema satisfà les especificacions del seu comportament sense model d'incertesa.
- **Estabilitat Robusta (ER):** el sistema és estable per tot el conjunt de plantes possibles.
- **Comportament Robust (CR):** el sistema satisfà les especificacions del seu comportament per tot el conjunt de plantes possibles.

En els models amb incertesa s'assumirà que el comportament dinàmic d'una planta és descrit no per un model LTI, sinó per un conjunt Π de possibles models LTI.

Π - conjunt de possibles models de la planta pertorbada.

$G(s) \in \Pi$ -- model de la planta nominal (sense incertesa).

$G_0(s) \in \Pi$ -- model de planta pertorbada.

- Conjunt de models estructurats: incertesa paramètrica

$$G(s) = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{min} \leq a \leq a_{max} \right\}$$

- Conjunt de models no estructurats: incertesa multiplicativa

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)W(s)) : \|\Delta\| \leq 1$$

7.1. Incertesa multiplicativa

S'anomena $G_0(s)$ la funció de transferència de la planta nominal i $G(s)$ la funció de transferència de la planta pertorbada, és a dir, la planta real. L'equació que les relaciona, tenint en compte la incertesa multiplicativa, és:

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)W(s)) \quad (\text{Eq. 19})$$

on $W(s)$ correspon a una funció de transferència anomenada funció de pesat i $\Delta(s)$ és qualsevol funció de transferència que satisfà $\|\Delta\|_\infty < 1$.

Una manera de representar-les en un diagrama de blocs és:

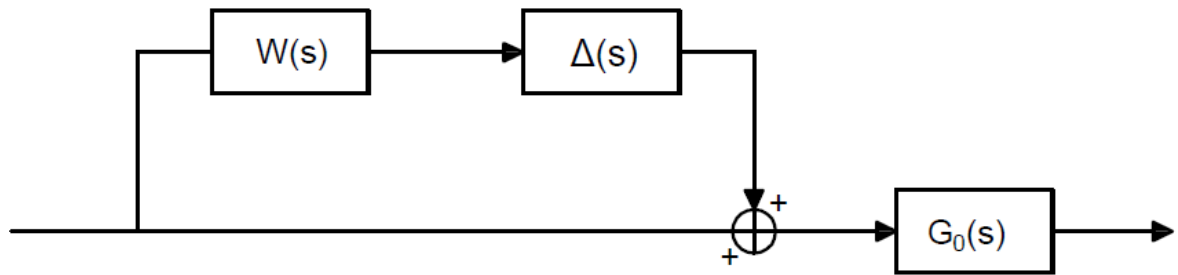


Figura 14: Planta amb incertesa multiplicativa

De la (Eq. 19) s'obté:

$$\frac{G(s)}{G_0(s)} - 1 = \Delta(s) \cdot W(s) \quad (\text{Eq. 20})$$

Per tant, si $\|\Delta\|_\infty < 1$:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (\text{Eq. 21})$$

$|W(j\omega)|$ proporciona la incertesa i normalment, tot i que no sempre, aquesta augmenta amb la freqüència. En aquesta aplicació, $W(s)$ té la següent expressió:

$$W(s) = k \cdot \frac{(\tau_2 \cdot s + 1)}{(\tau_1 \cdot s + 1)} \quad (\text{Eq. 22})$$

On:

- k : guany canònic de la funció de pesat $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0,01 i 10.
- τ_1 : constant de temps del pol de $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0,01 i 10.
- τ_2 : constant de temps del zero de $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0,01 i 10.

7.2. Incertesa paramètrica

La incertesa paramètrica es caracteritza per assumir que cada paràmetre incert és delimitat dins d'una regió $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Els paràmetres es poden descriure de la següent manera:

$$\alpha_p = \bar{\alpha} (1 + r_\alpha)$$

On $\bar{\alpha}$ és el paràmetre nominal i $r_\alpha = \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\alpha_{max} + \alpha_{min}}$ és la incertesa relativa del paràmetre.

L'objectiu d'aquesta aplicació és estudiar l'estabilitat del sistema. Per tant, es considera

necessari analitzar el marge d'estabilitat per així aconseguir una estabilitat robusta en el sistema de control.

Hi ha diferents tipus d'incertesa paramètrica depenen del paràmetre que es consideri incert:

- Incertesa en el guany

$$G(s) = kG_0(s); \quad k_{min} \leq k \leq k_{max} \quad (\text{Eq. 23})$$

On k és un guany incert i $G_0(s)$ és la funció de transferència nominal. Escrivint

$$k = \bar{k}(1 + r_k \Delta), \quad \bar{k} = \frac{k_{min} + k_{max}}{2}, \quad r_k = \frac{(k_{min} + k_{max})/2}{\bar{k}}$$

on r_k és la magnitud relativa de la incertesa del guany i \bar{k} és el guany mitjà. La (Eq. 23) també es pot reescriure com a incertesa multiplicativa:

$$G(s) = \bar{k}G_0(s)(1 + r_k \Delta(s)), \quad |\Delta| \leq 1$$

on $\Delta(s)$ és un escalar real i $G_0(s)$ és la planta nominal.

També hi ha altres tipus d'incerteses paramètriques com són la incertesa de la constant de temps o la incertesa dels pols. Tot i així, en aquest projecte només s'estudiarà la primera.

- Incertesa en la constant de temps τ

$$G(s) = k \frac{1}{\tau_p s + 1} G_0(s); \quad \tau_{min} \leq \tau_p \leq \tau_{max}$$

- Incertesa en els pols

$$G(s) = k \frac{1}{s - a_p} G_0(s); \quad a_{min} \leq a_p \leq a_{max}$$

Per estudiar l'estabilitat robusta, s'utilitza el criteri d'estabilitat de Nyquist. Aquest criteri proporciona informació de l'estabilitat de llaç tancat a partir de la resposta freqüencial de llaç obert. Es tracta, doncs, d'observar el comportament de la corba de Nyquist de llaç obert respecte el punt $-1 + j0$, conegut també com punt crític.

7.3. Enfocament Clàssic

Sabent que la funció de sensibilitat complementària es pot expressar com la (Eq. 7) quant varia $T(s)$ quan el procés pateix variacions?

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} - \frac{CdP}{1+PC} = \frac{1}{1+PC} \frac{dP}{P} = S \frac{dP}{P}$$

Recordem que la funció de sensibilitat $S(s)$ ens dóna informació de com les propietats del sistema de llaç tancat estan influenciades per petites variacions en el procés.

Exemple 8

Consideri la planta i el controlador següents:

$$G(s) = \frac{10}{(s+0.1)(s+3)(s+4)}, \quad C(s) = \frac{s+1}{s}$$

la funció de sensibilitat és:

$$S(s) = \frac{s^4 + 7s^3 + 12.7s^2 + 1.2s}{s^4 + 7s^3 + 12.7s^2 + 11.2s + 10}$$

Fent els càlculs corresponents s'obté:

$$\max|S(j\omega)| = 10,2\text{dB} = 3,24 \text{ (en valor absolut)} \text{ a } \omega = 1,14\text{rad/s}$$

Mirant el diagrama de Nyquist i el diagrama de Bode de $S(s)$:

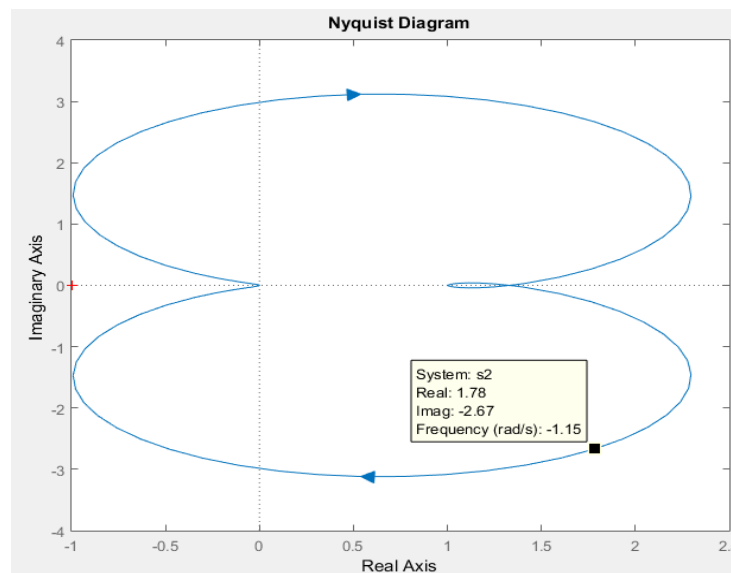
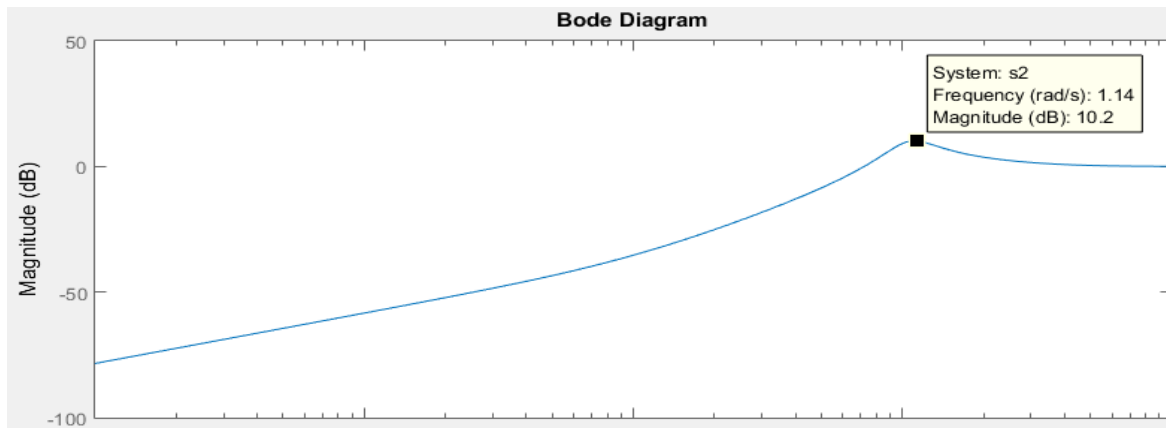
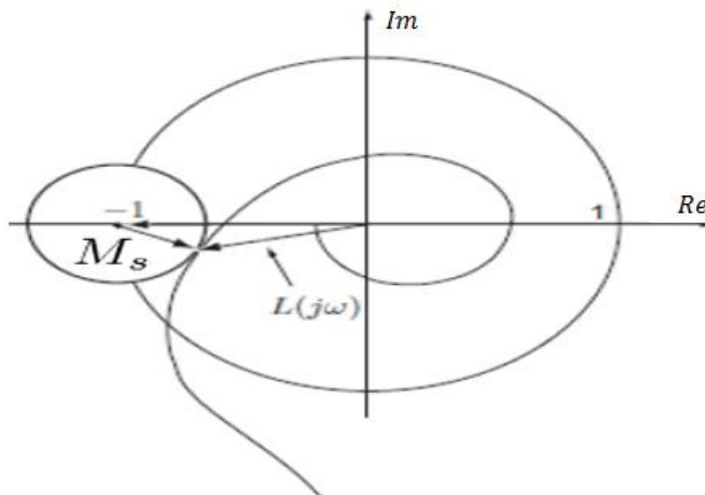


Figura 15: Diagrama de Nyquist de $S(s)$

Figura 16: Diagrama de Bode de $S(s)$

S'anomena marge de mòdul la distància des del punt -1 fins a la corba de Nyquist.

$$M_s = \max |S(j\omega)|$$

Figura 17: Representació de M_s en el diagrama de Nyquist

Amb el teorema de Pitàgores la distància des del punt P fins el punt -1 és de 3,24 en valor absolut.

$$\text{distància des de P a } (-1,0) = \sqrt{(1,78)^2 + (2,67)^2} = 3,24$$

7.4. Estabilitat robusta i representació de la incertesa en el domini freqüencial

Per analitzar la robustesa d'un sistema és necessari identificar una representació matemàtica de la incertesa del sistema. Per ara, considerarem sistemes amb el tipus d'incertesa no estructurada, derivada per exemple, de fonts de sorolls o dinàmiques no modelades.

Per raons analítiques, la funció de pesat i les pertorbacions d'incertesa han de ser representades per funcions de transferència estables. Aquí, es considera una incertesa multiplicativa, la qual és la més adient si la incertesa no afecta a l'estabilitat de llaç obert de la planta, p.e. no canvia el nombre de pols en el semi pla dret.

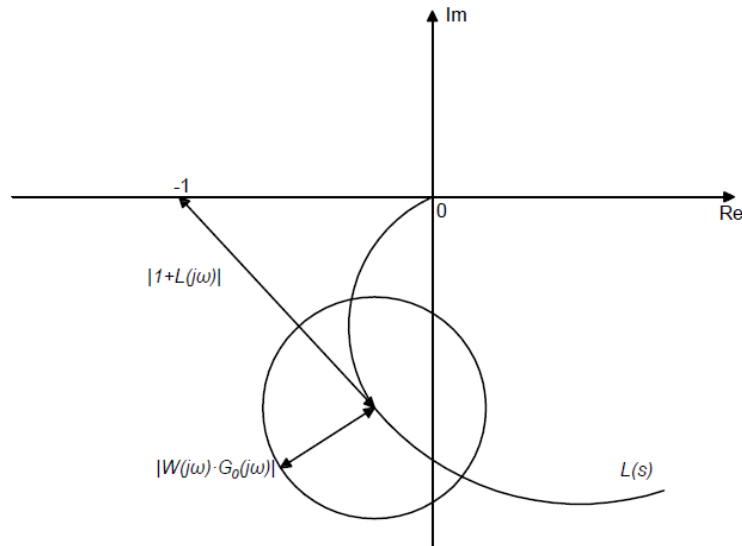


Figura 18: Distància al punt -1 i radi d'incertesa

Les funcions de sensibilitat i de sensibilitat complementaria estan definides en termes de la transmitància de llaç obert $L(s)$. Les funcions de sensibilitat nominals, $S_0(s)$ i $T_0(s)$ s'obtenen substituint $G(s)$ per $G_0(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \quad T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Si $|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$, la planta pertorbada $G(j\omega)$ està continguda en el disc d'incertesa centrat en $G_0(j\omega)$ amb radi $|W(j\omega)G_0(j\omega)|$, com es pot observar a la Figura 18.

L'estabilitat robusta s'aconsegueix si per cada membre del conjunt d'incertesa (Eq. 19), el sistema de llaç tancat és estable. El conjunt d'incertesa inclou òbviament la planta nominal $G_0(s)$, per tant, l'estabilitat robusta requereix que primer sigui estabilitzat el sistema nominal per algun controlador $C(s)$. Recordem que el criteri de Nyquist diu:

Segui

- P : el nombre de pols de part real positiva de la funció de llaç obert.

- N : el nombre de semi voltes que dona la corba en l'entorn del punt $(-1, 0)$. Negatiu si són en sentit contrari a les agulles del rellotge i positiu en sentit de les agulles del rellotge.

El sistema en llaç tancat serà estable si es compleix que $Z = P + N = 0$. Altrament, serà inestable.

S'aconsegueix doncs l'estabilitat robusta si i només si per cap planta pertorbada, $Z \neq 0$. Gràficament, aquesta condició manifesta que el disc d'incertesa de la corba del llaç obert nominal $L_0(s)$, amb radi $|W(j\omega)G_0(j\omega)|$ no ha d'intersecar el punt -1 en el diagrama de Nyquist per cap freqüència, perquè sinó existiria com a mínim una planta en el conjunt de plantes incertes que desestabilitzar el sistema de llaç tancat.

La distància des de la resposta de la freqüència nominal al punt -1 és $|L_0(j\omega) - (-1)|$. Per això, en termes d'estabilitat robusta, el radi del disc d'incertesa ha de ser més petit que aquesta distància per a totes les freqüències, $|W(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + L_0(j\omega)| \quad \forall \omega$. Si haguéssim escollit el radi com $|W(j\omega)L_0(j\omega)|$, aquest resultat es podria presentar en termes de la funció de sensibilitat complementària nominal.

$$|W(j\omega)T_0(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

7.5. Comportament Nominal i Robust

Tot i que en aquesta aplicació no s'estudia explícitament el comportament robust del sistema de llaç tancat, es considera rellevant explicar el funcionament del comportament nominal i robust d'un sistema per tal que el lector es pugui fer una idea de tot el procés que es segueix en l'estudi de sistemes robusts.

7.5.1. Sensibilitat de pesat

Com s'ha vist anteriorment, la funció de sensibilitat $S(s)$ és un molt bon indicador del comportament de llaç tancat. El principal avantatge de treballar amb $S(s)$ és que com volem $S(s)$ petit, n'hi ha prou amb considerar el seu guany i per tant no ens hem de preocupar de la seva fase.

Algunes de les especificacions típiques en termes de $S(s)$ són:

- Màxim error de seguiment en freqüències desitjades.
- El tipus del sistema, o alternativament el màxim error en règim permanent.
- El pic màxim de $S(s)$, $\|S(j\omega)\| \leq M$.

Aquesta última especificació del pic preveu amplifícacions en el soroll a altes freqüències, i també inclou el marge de robustesa, en condicions normals escollirem $M = 2$. Matemàticament, aquestes especificacions es poden complir amb un límit superior, $\frac{1}{W_p(s)}$, en el guany de $S(s)$, on $W_p(s)$, és una funció de pesat seleccionada per l'usuari.

Si la funció de sensibilitat desitjada és coneguda, la funció de pesat s'escollirà tal que compleixi $|W_p(j\omega)| < |S(j\omega)|^{-1} \quad \forall \omega$

De la mateixa manera que amb la funció de pesat $W(s)$, s'acostuma a escollir una $W_p(s)$ d'ordre mínim i el més simple possible. Val a dir que, en aquesta aplicació, només es treballarà amb $W(s)$ per simplificar el problema. Tot i així, s'explica el comportament robust amb les dues funcions de pesat per tal que el lector entengui tot el procés de d'anàlisi de control robust. [6]

7.5.2. Comportament Nominal

Consideri el comportament en termes de la funció de sensibilitat $W_p(s)$. La condició per un bon comportament nominal és:

$$CN \Leftrightarrow |W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W_p(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (\text{Eq. 24})$$

$|1 + L(j\omega)|$ representa a cada freqüència la distància de $L(j\omega)$ des del punt -1 en el diagrama de Nyquist, per tant $L(j\omega)$ ha d'estar com a mínim a una distància de $|W_p(j\omega)|$ del punt -1. Aquesta condició s'il·lustra gràficament en la Figura 19, on es veu que perquè es compleixi el CN, $L(j\omega)$ ha de romandre fora del disc de radi $|W_p(j\omega)|$ centrat en el punt -1.

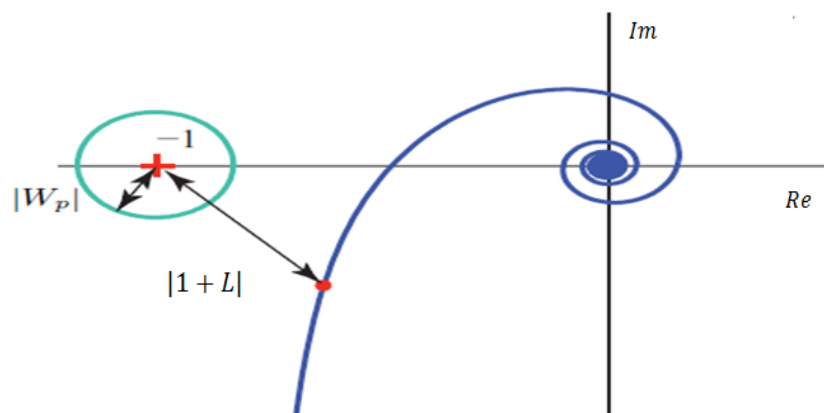


Figura 19: Comportament Nominal en el diagrama de Nyquist

7.5.3. Comportament Robust

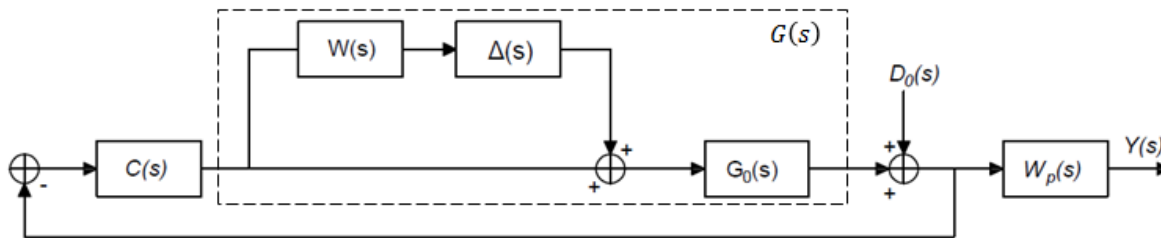


Figura 20: Diagrama del comportament robust amb incertesa multiplicativa

Pel comportament robust es requereix que es compleixi la (Eq. 24) per a totes les plantes possibles, incloent el pitjor cas dins el conjunt d'incertesa.

Si es compleix l'estabilitat robusta determinar si les especificacions es compleixen per a totes les plantes del conjunt d'incertesa:

$$|W_p(j\omega)S(j\omega)| + |W(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

Per a obtenir una estabilitat robusta necessitem que totes les corbes possibles de $L(j\omega)$ es dibuixin fora del disc de radi $|W_p(j\omega)|$ centrat en el punt $(-1,0)$. Com que $L(j\omega)$ es manté dins d'un disc de radi $|W(j\omega)G_0(j\omega)|$ centrat en $L(j\omega)$, es dedueix de la Figura 36 que la condició per tenir ER és que els dos discos no es solapin. Ja que els seus respectius centres estan ubicats a una distància de $|1 + L|$.

La representació gràfica estàndard del criteri de comportament robust, és que a cada freqüència, el disc d'incertesa no ha de creuar-se amb el disc de comportament centrat en el punt crític -1 amb radi $|W_p|$. Una interpretació equivalent és que la zona ombrejada amb blau, la qual conté el disc d'incertesa expandit pel $|W_p|$ no ha de creuar el punt -1 tal com es mostra a la Figura 21 (b). Aquest últim enfocament pot ser a vegades més útil ja que combina tota la informació necessària per a totes les freqüències en un sol gràfic.

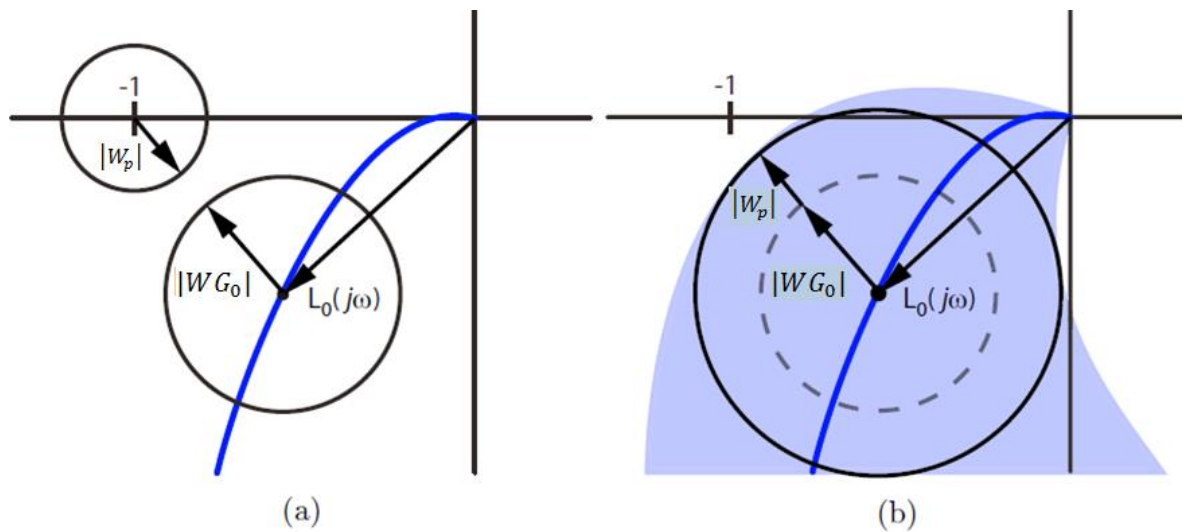


Figura 21: Comportament Robust amb incertesa multiplicativa

7.6. Implementació

7.6.1. Funcions creades

A continuació s'expliquen amb detall les funcions creades en aquesta aplicació:

- $(N,D)=\text{num_den_Gs}(\text{Dades_sistema})$
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de transferència de la planta nominal $G_0(s)$.
- $(\text{sys})=\text{transfer_function_Gs}(\text{Dades_sistema})$
Funció que retorna la funció de transferència de la planta nominal $G_0(s)$. Aquesta funció crida a la funció `num_den_Gs`, ja que la calcula a partir del seu numerador i denominador.
- $(N,D)=\text{num_den_Ws}(\text{Dades_sistema})$
Funció que retorna el numerador (N) i denominador (D) de la funció de pesat $W(s)$.
- $(\text{sys})=\text{transfer_function_Ws}(\text{Dades_sistema})$
Funció que retorna la funció de transferència de $W(s)$. Aquesta funció crida a la funció `num_den_W`, ja que la calcula a partir del seu numerador i denominador.

7.6.2. Metodologia per dibuixar les figures

A continuació, es procedeix a explicar la metodologia seguida per dibuixar les figures que es veuen per pantalla, on s'especifica quines funcions s'han utilitzat. Les funcions utilitzades

són el conjunt de les funcions creades explicades anteriorment i altres funcions existents, que són funcions que proporciona el programa *Sysquake* i es troben explicades al seu manual d'usuari. [3]

Representació pols

Com que es tracta d'un sistema de temps continu, aquesta gràfica correspon al pla s . Es visualitzen els pols de la planta nominal $G_0(s)$ i aquests es mostren en forma de creu. Donat que els seus valors ja estan prèviament definits a la part on es defineixen les dades del sistema, només és necessari cridar les funcions *real* i *imag* per dibuixar-los en el pla s . *Real* retorna la part real del pol i *imag*, la part imaginària.

Per a la manipulació dels pols i zeros, és a dir, per moure'ls pel pla s , s'han utilitzat tres funcions:

- *poly*: retorna el polinomi les arrels del qual són els pols del sistema.
- *movezero*: canvia la posició d'un zero real o complex en un polinomi de coeficients reals. En aquest cas, canvia la posició dels pols del polinomi que retorna la funció *poly* i retorna un nou polinomi del qual els seus pols tenen unes noves posicions.
- *roots*: calcula les arrels del polinomi que retorna la funció *movezero*, és a dir, calcula les noves posicions dels pols.

Diagrama de Nyquist

Es representa la part real de la funció de transferència $G_0(s)$ a l'eix d'abscisses i la part imaginària es traça a l'eix d'ordenades. Es fa servir la funció *num_den_Gs* per obtenir el numerador i denominador de $G_0(s)$, els quals s'utilitzen a la funció *nyquist* per dibuixar el diagrama.

Paràmetres:

En aquesta aplicació interactiva hi ha quatre paràmetres que fan referència als quatre coeficients del numerador de la planta i 3 paràmetres que fan referència al guany canònic, la τ_1 del denominador i la τ_2 del numerador. Per representar-los, s'ha utilitzat la funció *slider* que serveix per poder modificar de forma interactiva el valor de cadascun d'ells.

7.6.3. Procediment per fitar

En aquest apartat s'expliquen els passos que s'han seguit per fitar la corba de Nyquist.

S'han creat dos selectors anomenats *freqüències individuals polígons* i *freqüències individuals cercles*. El selector *freqüències individuals polígons* permet visualitzar la regió fitada per a quatre freqüències diferents. Aquest polígons dibuixats en el pla de color vermell tenen com a vèrtexs 16 punts que són la combinació dels mínims i màxims de cada coeficient α del numerador de $G_0(s)$. Hi ha quatre coeficients i per cada coeficient tenim un mínim i un màxim tot restant o sumant el marge d'error prèviament introduït com a *Dades_sistema.increment*. Per tant $2^4 = 16$ combinacions possibles. El selector de *freqüències individuals cercles* permet visualitzar la regió fitada per a les mateixes freqüències que el selector polígons però fita la regió amb el radi que es calcula com $|W(j\omega)G_0(j\omega)|$.

Diagrama de Nyquist

A continuació es procedeix a explicar el procediment seguit per fitar les regions d'incertesa. Com s'ha mencionat anteriorment el diagrama de Nyquist consta des dos regions fitades. Una en forma de polígon (incertesa paramètrica) i l'altre en forma de cercle (incertesa multiplicativa) i que s'han calculat de manera diferent. Aquestes donen una idea al lector de les regions d'incertesa en les quals el sistema pot ser estable.

Recordem que totes les regions fitades tant les de forma polígon com les de forma cercle tenen com a centre un punt que pertany a la corba de Nyquist del llaç obert $L(s)$.

a) Regió fitada Polígon: incertesa paramètrica

Donat un valor de freqüència de la traça de Nyquist ω_i , es calcula per aquesta freqüència la part real i imaginària de la resposta freqüencial mitjançant la funció:

- $(x,y)=nyquist(Ntotal\{i\},D,Dades_sistema.freq_w(k))$

On *Ntotal* és una variable que conté les 16 combinacions de coeficients α del numerador de $G_0(s)$. *D* és el numerador de la planta que és invariant i igual al de la planta nominal. Finalment, *Dades_sistema.freq_w* és la freqüència en la qual es dibuixa la regió. Aquesta freqüència és introduïda amb *Dades_sistema* i per tant la pot escollir l'usuari.

Un cop dibuixats els 16 punts sobre el diagrama de Nyquist es procedeix a enllaçar-los tots mitjançant vectors, de manera que quedi fitada la regió d'incertesa. Aquest pas es fa amb la funció:

- $(pointsfinal, index) = sort(atan2(pointsx-xc, pointsy-yc))$, la qual calcula l'angle de cada punt respecte l'eix d'ordenades i després els ordena de menor a major.

b) Regió fitada disc: incertesa multiplicativa

Donat un valor de freqüència de la traça de Nyquist ω_i , la regió fitada queda definida per la circumferència amb centre a $L(j\omega_i)$ i radi igual a $|W(j\omega_i)G_0(j\omega_i)|$, anomenada a partir d'ara circumferència limitadora. Les funcions que s'han utilitzat per implementar el codi són:

- *transfer_function_Gs*: s'obté la funció de transferència de $G_0(s)$.
- *transfer_function_W*: s'obté la funció de transferència de $W(s)$.
- *nyquist*: calcula la corba de Nyquist del llaç obert $L(s)$ per a un valor de freqüència determinat (ω_i). Correspon a un nombre complex i ho retorna en forma de part real (x) i part imaginària (y). $x + j \cdot y$ és el centre de la circumferència limitadora.
- *bodemag*: aquesta funció es fa servir dues vegades, per trobar el valor de guany de $W(s)$ i de $G_0(s)$ per a una freqüència determinada. Els dos valors de guany obtinguts (gW i gG) s'utilitzen per calcular el radi de la circumferència:
 $radi = abs(gW \cdot gG)$.

Amb el centre i el radi definits, ja es pot dibuixar la circumferència limitadora. El sistema roman estable sempre i quan les regions fitades no incloguin el punt $-1 + j0$.

8. Les aplicacions interactives i les fitxes

8.1. Procediment d'elaboració

A continuació es descriuen per ordre els passos que s'han seguit en el procés d'elaboració de cada fitxa.

- Definició i elecció dels elements representats a la interfície

El primer pas en el disseny de les aplicacions interactives consisteix en decidir quin concepte en concret es vol il·lustrar. Definit el primer pas, es determina com es vol representar a la interfície els diferents gràfics i altres elements com poden ser equacions, sliders o títols. Finalment, s'han d'escollir les representacions gràfiques que millor poden il·lustrar el concepte a l'usuari, així com les possibles relacions que poden derivar de la seva manipulació.

- Programació del codi Font mitjançant un editor de text

Sysquake disposa d'un editor de text incorporat però és recomanable utilitzar un altre editor independent com per exemple *Notepad++* o l'editor de text de Matlab, ja que aquest és força senzill i té algunes mancances.

- Muntatge i conversió del codi amb Sysquake

El codi obtingut amb l'editor de text extern es guarda amb l'extensió *.sq (arxiu.sq), que és l'extensió que usa Sysquake per defecte. Fent això, es podran visualitzar el conjunt de figures implementades a la interfície. Per obtenir les aplicacions que s'entreguen als usuaris finals, per exemple els estudiants, és necessari muntar els executables a partir dels arxius *.sq, els quals tenen l'extensió *.exe.

- Redactat de la Memòria Final

L'últim pas és redactar la memòria del treball que posteriorment s'entregarà al jurat. És recomanable que es redacti per a un públic amb coneixements molt bàsics envers la matèria, ja que es tendeix a obviar molts conceptes que per a altres estudiants d'altres branques de l'enginyeria no ho són tant. Els documents també serveixen de manual d'ús pels estudiants. Cada aplicació interactiva disposa d'una fitxa i és on hi ha el gruix de les descripcions funcionals de cadascuna de les aplicacions.

8.2. La filosofia de les aplicacions

Les dues aplicacions creades en cadascuna de les fitxes tenen un objectiu molt concret, que és ni més ni menys que el de fer més amè i entenedor els conceptes teòrics. Això significa que els elements dibuixats a la interfície siguin reconeguts per l'usuari. L'usuari, tot manipulant els gràfics il·lustrats, ha de poder distingir amb claredat els elements actius i passius o els elements dinàmics i els estàtics. Seguint en aquesta línia, la manipulació dels elements ha de ser senzilla i intuïtiva. Finalment, totes les fitxes han de seguir una estructura similar pel que fa la ubicació dels gràfics, equacions, títols, etc. D'aquesta manera l'usuari es familiaritzarà més ràpid amb l'aplicació.

En un cas particular com poden ser els estudiants, totes aquestes característiques esmentades anteriorment, afavoreixen un ús independent de l'aplicació sense necessitat de la presència del professor de l'assignatura.

8.2.1. Les aplicacions interactives creades

S'han creat un total de dues aplicacions:

1. Resposta freqüencial i temporal d'un model de temps continu amb PA
2. Incertesa i Robustesa

8.3. Filosofia de les fitxes

Contingut teòric

En aquest apartat s'explica de forma breu la part teòrica que està darrere de cada gràfic il·lustrat a l'aplicació. Té com a funció principal situar l'usuari en quina part del tema estem treballant i que aquest compregui la utilitat de cada element il·lustrat i com aquest està relacionat amb cada gràfic. Aquest apartat inclou referències bibliogràfiques perquè estiguin a la disposició de l'usuari si aquest vol aprofundir en la teoria.

Pantalla

Aquí s'explica amb detall el funcionament dels diferents elements, ja siguin gràfics, equacions o barres mòbils que apareixen per pantalla un cop inicialitzem l'aplicació. S'especifiquen, per a cada figura, els elements que es representen, els colors i formes que prenen i com l'usuari pot manipular els elements interactius. Es mostra, també, la imatge que es visualitza per pantalla mitjançant una captura de pantalla de l'aplicació.

Exemples

En aquest últim apartat es mostren uns quants exemples relacionats amb el que s'explica a l'apartat de contingut teòric. Serveix perquè l'usuari observi diferents configuracions del que s'ha mostrat i entengui millor els conceptes.

9. Les fitxes

9.1. Parametrització afí de controladors per a plantes estables

9.1.1. Contingut teòric

En aquesta aplicació s'introdueix el concepte de parametrització, també coneguda com a parametrització-Q o parametrització de Youla, de tots els controladors estabilitzants d'una planta estable $G(s)$. Per a controladors estabilitzants ens referim a tots els controladors que provoquen estabilitat interna del sistema de llaç tancat.

Només es tractaran plantes estables, per les quals la seva parametrització s'obté de manera més fàcil, ja que les plantes inestables requereixen l'ús de la factorització coprímia. En els exemples s'estudia el comportament d'un sistema amb un controlador obtingut amb la parametrització de Youla. Mitjançant els diferents gràfics relacionats entre ells es verifiquen els conceptes explicats als capítols 5 i 6.

Per a una planta estable $G(s)$, la seva realimentació és internament estable si i només si

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

és estable.

Recordem que per comprovar l'estabilitat d'un sistema de llaç tancat, normalment n'hi ha prou en verificar que una de les funcions de sensibilitat és estable, p.e.:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}$$

De totes maneres, fent això assumim que no hi ha cap cancel·lació pol-zero interna entre el controlador i la planta.

Exemple 9

Consideri el sistema realimentat amb la plana i el controlador següent:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}$$

Per obtenir la funció de llaç obert es cancel·la el terme $(s-1)$, un pol amb part real positiva i obtenim:

$$L(s) = \frac{k}{s}, \quad i \quad S(s) = \frac{s}{s+k}$$

Per tant, $S(s)$ és estable. En canvi, si es mira la funció de llaç tancat entre $U(s)$ i $N(s)$, aquesta queda:

$$U(s) = -\frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)}N(s) = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+1)}N(s)$$

que és inestable.

Conseqüentment, encara que el sistema sembla ser estable quan considerem el senyal de sortida $Y(s)$, aquest és inestable quan considerem un senyal intern $U(s)$. En conclusió, el sistema és internament inestable.

Hem vist que una parametrització del controlador es pot expressar de la següent manera:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - G(s)Q(s)}$$

on $Q(s)$ és qualsevol funció de transferència estable.

Per tant, variant lliurement $Q(s)$, sempre i quan sigui estable, sempre tindrem estabilitat interna i en conseqüència, evitarem cancel·lacions pols-zeros del semi pla dret complex entre $C(s)$ i $G(s)$. Això significa que, encara que $Q(s)$ pugui generar controladors inestables, no hi ha perill en tenir un pol de part real positiva a $C(s)$ que cancel·li un zero de part real positiva en $G(s)$.

Comportament nominal

És important tenir present en tot moment les tres relacions fonamentals del sistema de llaç tancat que ens ocupa. De la Figura 6 i suposant que $D(s) = 0$:

$$Y(s) = T(s)(R(s) - N(s)) + S(s)D_0(s)$$

$$E(s) = S(s)(R(s) - D_0(s)) + T(s)N(s)$$

$$U(s) = C(s)S(s)(R(s) - N(s) - D_0(s))$$

Estabilitat interna \Leftrightarrow totes les funcions de transferència de dalt són estables

Limitacions fonamentals en la sensibilitat

Hem esmentat anteriorment que per a un sistema SISO es compleix la igualtat:

$$S(s) + T(s) = 1$$

Generalment, es vol una $S(s)$ petita per a obtenir beneficis de la realimentació (errors petits per a pertorbacions i entrades), i $T(s)$ petita per evitar sensibilitat al soroll, el qual és un dels grans desavantatges de la realimentació. Desafortunadament, aquestes dues

condicions no es poden complir simultàniament a cap freqüència. Tanmateix, implica que per a qualsevol freqüència o bé $|S(j\omega)|$ o $|T(j\omega)|$ ha de ser més gran o igual a 0,5, i també que $|S(j\omega)|$ i $|T(j\omega)|$ a cap freqüència poden diferir de més de 1. [6]

Els millors indicadors d'un bon comportament del sistema

- $T = 1$ no és suficient per tenir un bon comportament del sistema, també s'ha de considerar la fase de $T(s)$.
- Per a tenir un bon comportament del sistema volem que $S(s)$ sigui propera a 0, i aquest serà el cas si $|S| = 0$ independentment de la seva fase.

Anàlisi de la resposta temporal

Per analitzar la resposta del sistema en llaç tancat es farà un estudi per separat de cada entrada suposant les altres dues nul·les i posteriorment se sumaran mitjançant el Teorema de Superposició.

Suposem una entrada graó per $R(s)$ i les altres dues nul·les. L'equació de sortida queda:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s),$$

Suposem una entrada graó per $D(s)$ i les altres dues nul·les. L'equació de sortida queda:

$$Y(s) = S(s)D(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} D_0(s),$$

Finalment, suposem una entrada graó per $N(s)$, i les altres dues nul·les. L'equació de sortida queda:

$$Y(s) = -\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} N(s).$$

Fent ús del Teorema de Superposició l'equació del senyal de sortida tenint en compte les tres entrades és:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s) + \frac{1}{1 + C(s)G(s)} D_0(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} N(s)$$

Error en estat estacionari

La resposta permanent és aquella que s'assoleix quan el sistema s'estableix. Hi ha casos que, per una entrada acotada, no s'aconsegueix un valor d'establiment constant, sent aquestes situacions no desitjades, tal com succeeix amb la resposta al graó dels sistemes de tipus 1.

És important recordar que l'error només està definit per sistemes de llaç tancat ja que correspon a la diferència entre l'entrada o senyal de referència i la sortida del sistema. El

senyal de referència és el valor que la sortida està seguint i es desitja que la diferència entre aquestes sigui zero.

Pel sistema de la Figura 6 l'error s'expressa segons l'equació:

$$E(s) = S(s)R(s) - T(s)N(s)$$

Suposant el soroll nul queda:

$$E(s) = S(s)R(s) = R(s)(1 - T(s)) = R(s)(1 - Q(s)G(s))$$

Finalment, utilitzant el Teorema del Valor Final (TVF) es calcula el valor que assolirà $e(t)$ quan el temps tendeixi a infinit:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - Q(s)G(s))$$

Com es pot observar l'error depèn de l'entrada a la qual està sotmès el sistema i del tipus que presenta la funció de sensibilitat $S(s)$. En alguns exemples posteriors es calcularan els errors de la resposta temporal.

9.1.2. Pantalla

Un cop executem el codi font el programa Sysquake retorna una pantalla com la de la Figura 22 amb les diferents representacions gràfiques.

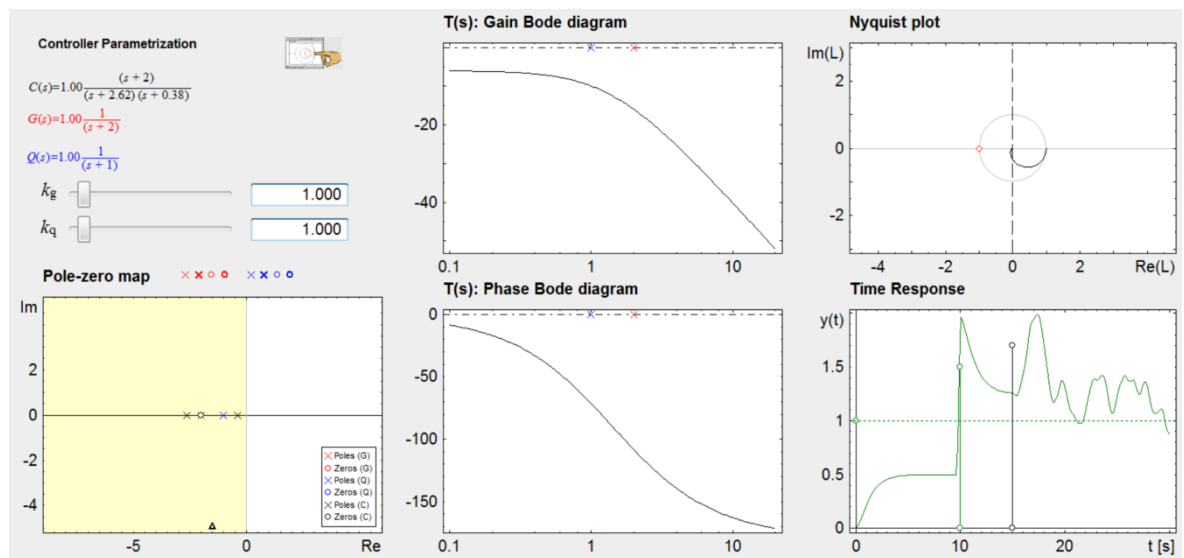


Figura 22: Figures que apareixen per pantalla

Es poden escollir dues vistes de la pantalla de l'aplicació mitjançant la pestanya *Info*: la vista 1 i 2. A la vista 1, tal i com s'observa a la Figura 1, apareixen el pla s, el diagrama de Bode

(guany) i el diagrama de Bode (fase), el diagrama de Nyquist i la resposta temporal del sistema en llaç tancat. A la vista 2 apareixen, en comptes dels dos últims diagrames mencionats, els diagrames de Bode de guany i fase de la funció de transferència $S(s)$.

S'estudia el comportament del sistema en llaç tancat $T(s)$ amb el diagrama de bode. El Nyquist fa referència al sistema de llaç obert $L(s)$ i finalment la resposta temporal del sistema té en compte el senyal d'entrada $R(s)$, la pertorbació $D_0(s)$ i el soroll $N(s)$.

Control de parametrització

A sota del títol estan dibuixades amb ordre, les equacions del controlador $C(s)$, la planta $G(s)$ i la transmitància $Q(s)$. Més avall, estan definides dues barres mòbils, les quals representen el valor del guany canònic de $G(s)$ i de $Q(s)$. El valor del guany oscil·la entre 0,1 i 15, prenent sempre valors positius. Just a la part dreta d'on acaben les barres estan representats dos quadrats on es pot visualitzar el valor numèric exacte que pren cadascun del guany canònic. A més a més, també hi ha l'opció de clicar sobre un d'aquests quadrats i introduir amb exactitud el valor del guany desitjat. Aquesta última funcionalitat és de gran utilitat en casos en què es vulgui estudiar l'estabilitat del sistema per a valors concrets dels guanys.

Representació pols i zeros

Aquesta figura representa el pla s i s'hi poden visualitzar els pols i zeros de les tres funcions de transferència dibuixades a dalt a l'esquerra cadascuna amb el mateix color que els seus pols i zeros: $C(s)$ de color negre, $G(s)$ de color vermell i $Q(s)$ de color blau. Els pols es mostren en forma de creu i els zeros en forma de rodona. Els pols i zeros de $G(s)$ i $Q(s)$ són manipulables tot apropant el ratolí a una de les creus o cercles. Un cop Sysquake detecta que el ratolí està prou a prop de l'element s'activa la funció *mousedrag* que permet arrossegar aquest element a qualsevol altre punt del gràfic mantenint el botó dret del ratolí premut. En el punt on es deixi anar es desactivarà la funció *mousedrag* i aquell element quedarà situat en aquella posició.

Diagrama de Bode (guany) del llaç tancat $T(s)$

Aquesta figura correspon al diagrama de Bode de la funció de llaç tancat i s'hi representa el guany (dB) en funció de la freqüència (rad/s).

Sobre la línia discontinua d'abscisses es dibuixen els mòduls dels pols de $G(s)$ i $Q(s)$. Aquests són manipulables però a diferència de la figura de pols i zeros només es poden moure sobre l'eix d'abscisses. El valor dels pols surt expressat a la barra inferior esquerra de la pantalla quan els manipulem.

Diagrama de Bode (fase) del llaç tancat $T(s)$

Aquesta figura correspon al diagrama de Bode de la funció de llaç tancat i s'hi representen les corbes de fase. Seguint la mateixa dinàmica que pel *Diagrama de Bode (guany)*, en aquesta figura també es dibuixen el mòdul dels pols de les funcions de transferència $G(s)$ i $Q(s)$ amb el seu color corresponent.

Diagrama de Bode (guany) del llaç obert $S(s)$

Aquest diagrama representa la inversa del diagrama de Bode (guany) de $T(s)$. És a dir, quan el guany de $T(s)$ augmenta el guany de $S(s)$ disminueix tot complint la igualtat esmentada anteriorment: $T(s) + S(s) = 1$.

Diagrama de Bode (fase) del llaç obert $S(s)$

Aquest diagrama representa la inversa del diagrama de Bode (fase) de $T(s)$. És a dir, quan la fase de $T(s)$ augmenta la fase de $S(s)$ disminueix tot complint la igualtat esmentada anteriorment: $T(s) + S(s) = 1$.

Diagrama de Nyquist

En aquesta figura es representa el comportament freqüencial de $L(j\omega)$ dibuixant el seu diagrama polar. La part real de $L(j\omega)$, que és la funció de llaç obert controlador-planta, a l'eix d'abscisses, mentre que la seva part imaginària es representa a l'eix d'ordenades. S'observa una circumferència de color gris que correspon a la circumferència de radi unitat.

Donat que el diagrama de Nyquist és un diagrama polar on el guany i l'angle de fase s'expressen en coordenades polars, també s'han representat els valors de marge de fase i marge de guany. EL marge de guany es representa amb una línia de color rosa des del punt que la corba talla l'eix d'abscisses per la part negativa fins el punt -1. El marge de fase es representa com a coordenada angular amb un arc de color verd fosc des dels 180 graus fins el punt on la corba de Nyquist talla la circumferència de radi 1, que és el punt on el guany de $L(j\omega)$ és igual a 1.

- **Marge de guany:** es dibuixa en forma de segment horitzontal de color rosa. Aquest segment indica la distància que va del punt (0,0) a la traça de Nyquist quan aquesta creua l'eix real negatiu. Aquesta distància és igual al marge de guany. El seu valor es mostra com a missatge informatiu a la barra inferior de la pantalla quan es posa el cursor sobre del segment.
- **Marge de fase:** es dibuixa un arc de color verd que va del punt (0,0) al punt de creuament entre la traça de Nyquist i la circumferència de radi unitat. La fase

que va dels -180° al segment és el marge de fase. El seu valor es mostra com a missatge informatiu a la barra inferior de la pantalla quan es posa el cursor a sobre del segment.

Per validar la concordança dels gràfics, es verifiquen tres factors:

- La fase a la que tendeix el Bode fase de $T(s)$ ha de coincidir amb la fase del diagrama de Nyquist quan la pulsació val infinit.
- Quan el Bode guany comença per 0dB, el Nyquist ha de començar a l'infinit.
- De la representació de $T(s)$ i $S(s)$ s'ha de poder interpretar el mateix model, ja que un és la inversa de l'altre.

Diagrama de la resposta temporal

El diagrama de la resposta temporal expressa l'evolució temporal de la variable de sortida $y(t)$ en funció de l'entrada $r(t)$, la pertorbació $d_0(t)$ i el soroll $n(t)$, totes tres com a entrades graó.

Es poden observar dues pertorbacions que afecten l'evolució de la resposta temporal. Una d'elles fa referència a una entrada graó, l'altra simbolitza l'efecte del soroll. Cada pertorbació està indicada en forma de recta vertical, amb origen en l'eix d'abscisses i final en forma de cercle. L'usuari pot variar les característiques de cada pertorbació tal i com s'indica a continuació:

- La recta vertical es pot moure en la direcció horitzontal, en sentit esquerre o dret, fent variar el moment en el qual entra aquest senyal.
- Es pot modificar la longitud de la recta, fent variar l'amplitud de la pertorbació.

Tant per variar el temps com l'amplitud, l'usuari ha de posar el cursor a sobre del cercle. En aquest moment s'activa la funció *mousedrag* i el programa et permet arrossegar-lo.

9.1.3. Exemples

- Exemple 1: Planta de primer ordre estable i grau relatiu 0
- Exemple 2: Planta de segon ordre estable i grau relatiu 2
- Exemple 3: Planta de segon ordre estable i grau relatiu 1
- Exemple 4: Planta de segon ordre estable, grau relatiu 1 i fase no mínima

En aquest apartat s'expliquen amb detall la bateria d'exemples que té implementats aquesta aplicació. En tots els casos la planta és estable al principi. A mesura que es va augmentant el guany, tant de $G(s)$ com de $Q(s)$, el sistema pot tornar-se inestable.

L'estudi de la resposta temporal d'un sistema és de vital importància pel posterior anàlisi del seu comportament i el possible disseny d'un sistema de control. En aquest capítol es realitzarà un estudi detallat de la resposta temporal del sistema, el qual es fonamentarà en el coneixement previ que es té del model de la planta. A més a més, s'explicaran els gràfics de Bode tant de $T(s)$ com de $S(s)$ i la seva relació entre ells, així com el criteri de Nyquist.

1. Planta de primer ordre estable i grau relatiu 1

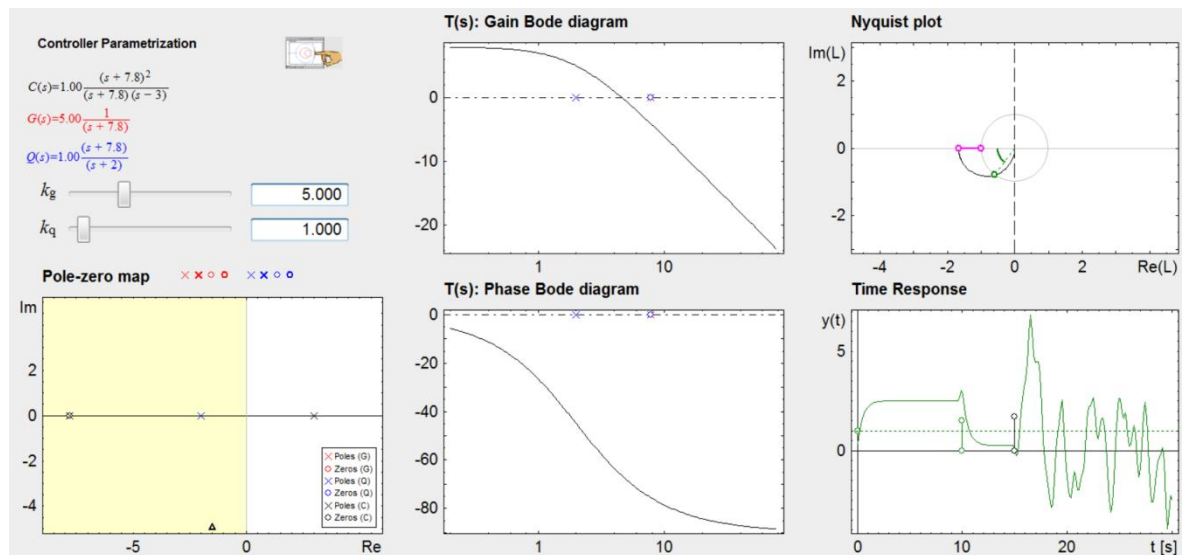


Figura 23: Interfície exemple 1

Segui el model de la planta i la transmitància $Q(s)$:

$$G(s) = \frac{5}{s + 7,8}, \quad Q(s) = \frac{s + 7,8}{s + 2}$$

La funció de transferència de llaç tancat queda:

$$T(s) = G(s)Q(s) = \frac{5}{s + 7,8} \frac{s + 7,8}{s + 2} = \frac{5}{s + 2} = \frac{2,5}{\frac{s}{2} + 1}$$

De la funció de transferència en forma canònica es dedueix el guany del sistema K_p i la constant de temps τ :

$$K_p = 2,5, \quad \tau = 0,5$$

Utilitzant el Teorema del Valor Final (TVF) es calcula el valor al que tendeix la sortida quan el temps tendeix a infinit.

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s+2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

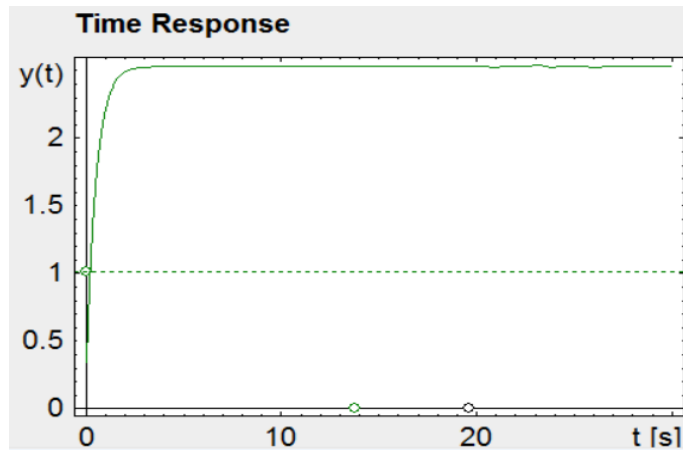


Figura 24: Resposta temporal amb consigna eferencia

Sent una entrada graó unitari, la sortida tendeix a 2,5, el qual coincideix amb el guany canònic.

Tal com s'observa a la Figura 24, el senyal de sortida no segueix amb precisió la referència d'entrada. Això és a causa de l'error en règim permanent del sistema.

Suposant el soroll nul, l'error es calcula amb l'expressió:

$$E(s) = R(s)S(s) = R(s)(1 - T(s)) = R(s)(1 - Q(s)G(s))$$

Mitjançant el TVF es calcula el valor que assolirà quan el temps tendeixi a infinit:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - Q(s)G(s))$$

$$G(0) = \frac{5}{7,8} = 0,64, \quad Q(0) = \frac{7,8}{2} = 3,9$$

Per tant, l'error enfront a una entrada graó unitari és:

$$e_{ss} = \frac{1}{s}(1 - 0,64 \cdot 3,9) = -1,5$$

el qual coincideix amb la diferència entre l'entrada i la sortida.

L'amplitud de la referència d'entrada es pot augmentar o disminuir mitjançant el cercle de color verd situat sobre l'eix d'ordenades. En la figura anterior el cercle està situat al punt (0,1) i per tant l'entrada de la referència té amplitud unitària.

Si augmentem l'amplitud del graó a dos, el valor de la sortida en règim estacionari també és el doble, en aquest cas $2,5 \times 2 = 5$.

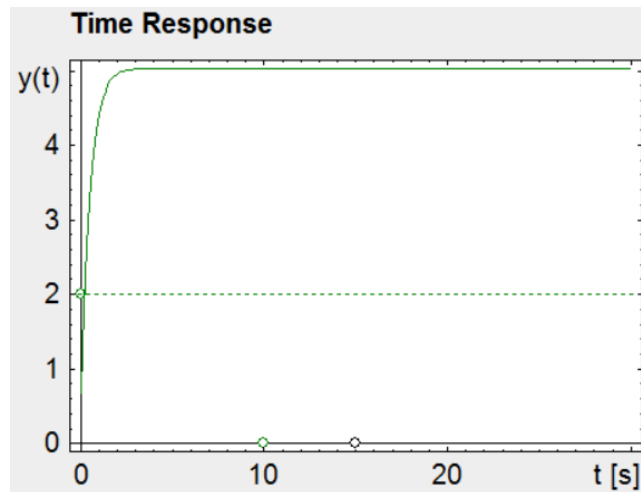


Figura 25: Resposta temporal pertorbació

Si considerem la referència i el soroll nuls el sistema queda:

$$Y(s) = S(s)D_0(s) = \frac{s^2 + 4,8s - 23,4}{s^2 + 9,8s + 15,6} D_0(s) = \frac{(s + 7,8)(s - 3)}{(s + 7,8)(s + 2)} D_0(s) = \frac{s - 3}{s + 2} D_0(s)$$

Si fem entrar una entrada graó unitari per $D_0(s)$ la resposta en règim estacionari queda:

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s - 3}{s + 2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

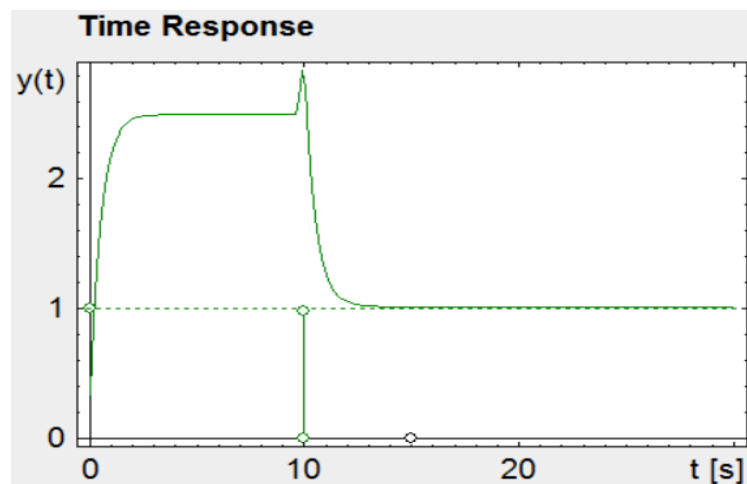


Figura 26: Resposta temporal referència + pertorbació

S'observa com la sortida del sistema passa de 2,5 a 1 després de l'efecte de la pertorbació.

Finalment, a la Figura 27 s'observa la resposta temporal quan entra una consigna graó tant a la referència com a la pertorbació i amb el soroll activat.

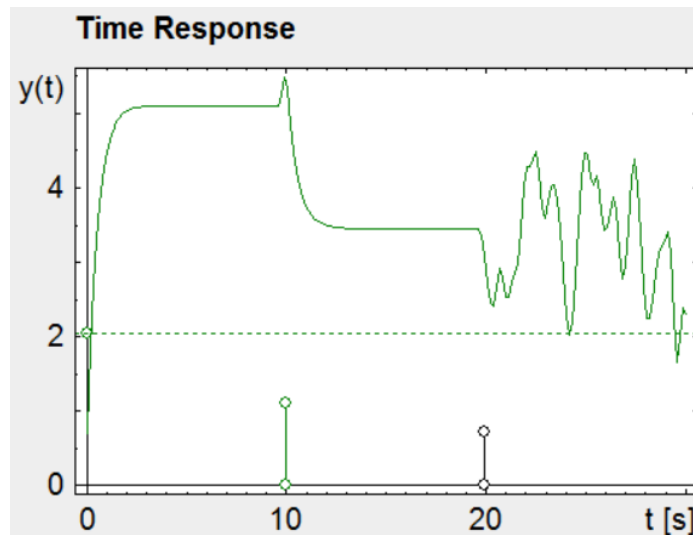


Figura 27: Resposta temporal referència + pertorbació + soroll

- Diagrama de Nyquist

La funció de transferència de llaç obert és:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{s + 7,8}{s - 3} \cdot \frac{5}{s + 7,8} = \frac{5}{s - 3}$$

Tenim $P = 1$ i $N = -1$ i per tant $Z = 1 - 1 = 0$ i es comprova que el sistema és estable.

La línia de color lila ens marca el marge de guany. El cercle lila situat a l'extrem esquerra indica la freqüència en els 180 graus. El cercle situat a l'extrem dret de la línia indica el punt (-1,0).

La ω_{180} és 0. Per aquesta freqüència el guany és 1,67. En conseqüència el $MG = \frac{1}{1,67} = 0,6$.

Per indicar el marge de fase de forma visual s'ha dibuixat un cercle de color verd fosc en el punt on el guany és unitari. A partir d'aquí es traça una línia discontinua també de color verd fosc des de l'origen fins aquest punt i seguidament es dibuixa un arc que indica el marge de fase. En aquest exemple el $MF = 51,13$ graus.

- Diagrama de Bode $T(s)$

La funció de transferència en forma canònica és:

$$T(s) = \frac{2.5}{\frac{s}{2} + 1}$$

Per tant, considerem un element constant i un altre de primer ordre:

$$T_1(s) = 2.5, \quad T_2(s) = \frac{1}{\frac{s}{2} + 1}$$

La constant fa que el diagrama de Bode comenci amb una recta horitzontal a l'alçada de $\bar{M} = 20 \log 2.5 = 7,96$.

Del segon element es dedueix que a $\omega = 2$ la corba agafa un pendent de -20dB/dec.

En el diagrama de fase s'observa que comença a 0 graus i acaba a 90. Té sentit perquè no hi ha cap integrador, tampoc hi ha zeros i finalment el segon element no és de desfasament no mínim

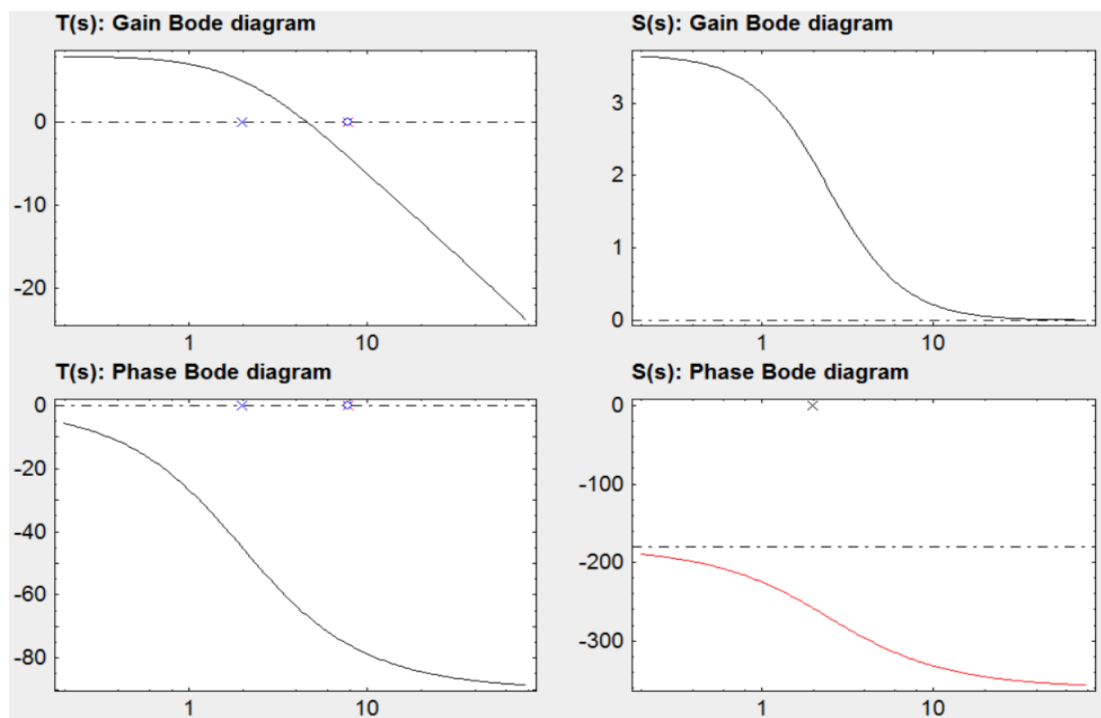


Figura 28: Diagrames de Bode de $T(s)$ i $S(s)$

2. Planta de segon ordre estable i grau relatiu 2

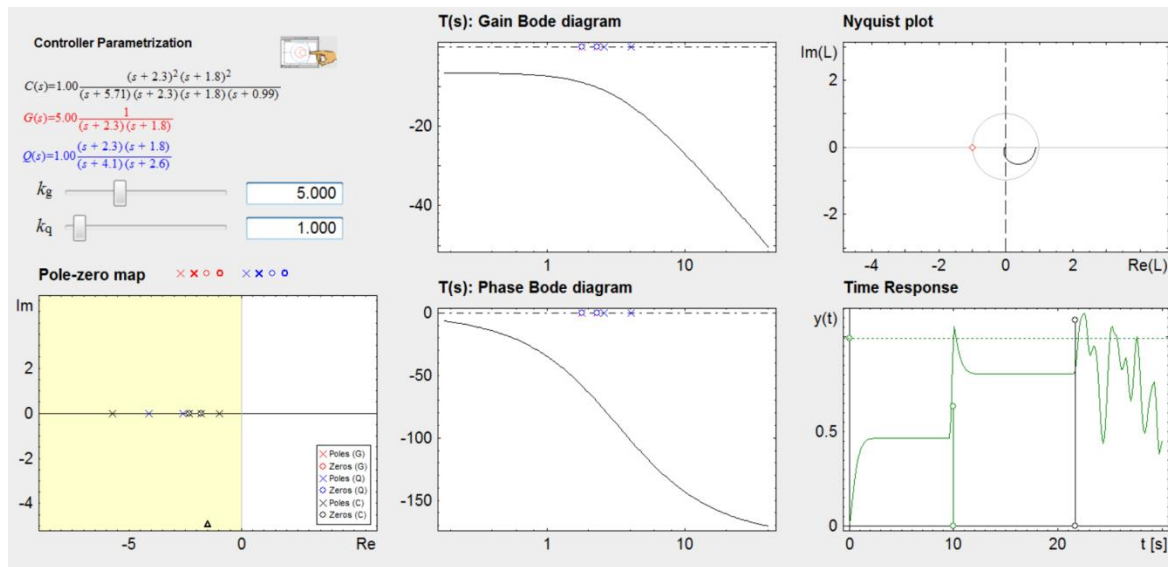


Figura 29: Interfície exemple 2

Segui la planta i la transmitància $Q(s)$:

$$G(s) = \frac{5}{(s + 2,3)(s + 1,8)}, \quad Q(s) = \frac{(s + 2,3)(s + 1,8)}{(s + 4,1)(s + 2,6)}$$

La funció de transferència de llaç tancat queda:

$$T(s) = G(s)Q(s) = \frac{5}{(s + 4,1)(s + 2,6)} = \frac{5}{s^2 + 6,7s + 10,66} = \frac{0,469}{\frac{s^2}{10,66} + \frac{6,7s}{10,66} + 1}$$

Com que la funció de llaç tancat té dues arrels reals negatives la resposta temporal serà sobre amortida. És a dir, el sistema equival a dos sistemes de primer ordre en cascada.

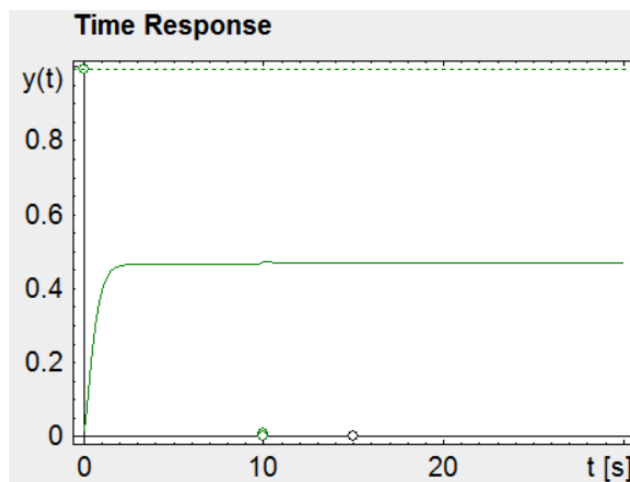


Figura 30: Resposta temporal amb consigna referència

Utilitzant el Teorema del Valor Final es calcula el valor al que tendeix la sortida quan el temps tendeix a infinit.

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s^2 + 6,7s + 10,66} = \frac{5}{10,66} = 0,469$$

Sent una entrada graó unitària, la sortida tendeix a **0,469**.

Mitjançant el TVF es calcula el valor que assolirà la sortida quan el temps tendeixi a infinit:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - Q(s)G(s))$$

$$G(0) = \frac{5}{2,3 \cdot 1,8} = 1,208, \quad Q(0) = \frac{2,3 \cdot 1,8}{4,1 \cdot 2,6} = 0,39$$

Per tant, l'error enfront a una entrada graó unitari és:

$$e_{ss} = s \frac{1}{s} (1 - 1,208 \cdot 0,39) = \mathbf{0,529}$$

el qual coincideix amb la diferència entre l'entrada i la sortida.

Si considerem la referència i el soroll nuls el sistema queda:

$$Y(s) = S(s)D_0(s) = \frac{(s + 5,71)(s + 0,99)}{(s + 5,71)(s + 0,99) + 5} D_0(s) = \frac{s^2 + 6,7s + 5,65}{s^2 + 6,7s + 10,65} D_0(s)$$

Si fem entrar una entrada graó unitària per $D_0(s)$ la resposta en règim estacionari queda

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 6,7s + 5,65}{s^2 + 6,7s + 10,65} = \frac{5,65}{10,65} = 0,53$$

El valor de la sortida en règim estacionari després de l'entrada de la pertorbació és:

$$0,469 + 0,53 = 1$$

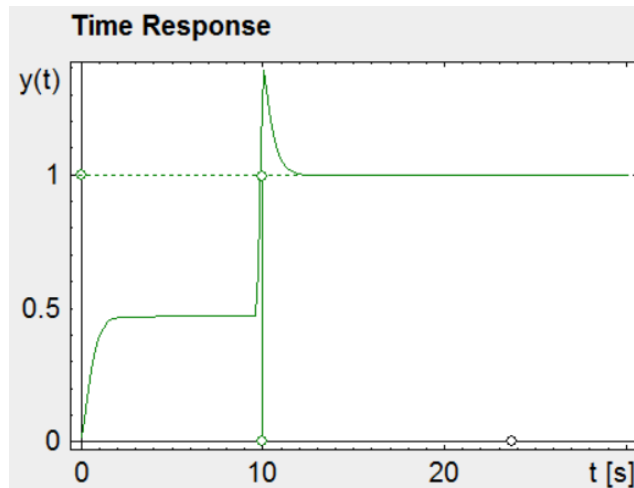


Figura 31: Resposta temporal referència + pertorbació

- Diagrama de Nyquist

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{(s + 2,3)(s + 1,8)}{(s + 5,71)(s + 0,99)} \cdot \frac{5}{(s + 2,3)(s + 1,8)} = \frac{5}{(s + 5,71)(s + 0,99)}$$

Utilitzant el criteri de Nyquist comprovem que el sistema és estable.

Tenim $P = 0$ i $N = 0$ i per tant $Z = 0$, i es comprova que el sistema és estable.

En aquest cas s'observa com la corba de Nyquist no arriba mai a tallar l'eix d'abscisses del semi pla esquerrà i per tant no té sentit parlar de marge de guany. Tanmateix, la corba tampoc tallar mai la circumferència de radi unitat, fet que indica que cap punt de la corba arriba a tenir mai guany unitari. Per tant, tampoc té sentit parlar de marge de fase.

- Diagrama de Bode $T(s)$

La funció de transferència és:

$$T(s) = \frac{5}{(s + 4,1)(s + 2,6)} = \frac{0,469}{\frac{s^2}{10,66} + \frac{6,7s}{10,66} + 1}$$

Per tant, considerem un element constant i dos de primer ordre:

$$T_1(s) = 0,469, \quad T_2(s) = \frac{1}{\frac{s}{4,1} + 1}, \quad T_3(s) = \frac{1}{\frac{s}{2,6} + 1}$$

La constant fa que el diagrama de Bode comenci amb una recta horitzontal a l'alçada de $\bar{M} = 20 \log 0,469 = -6,576$.

Dels dos elements de primer ordre es dedueix que a $\omega = 2,6$ la corba agafa un pendent de -20dB/dec i a $\omega = 4,1$ agafa un pendent de -40dB/dec.

En el diagrama de fase s'observa que comença a 0 graus i acaba a 180. Té sentit perquè no hi ha cap integrador, tampoc hi ha zeros i finalment el segon i el tercer element no són de desfasament no mínim.

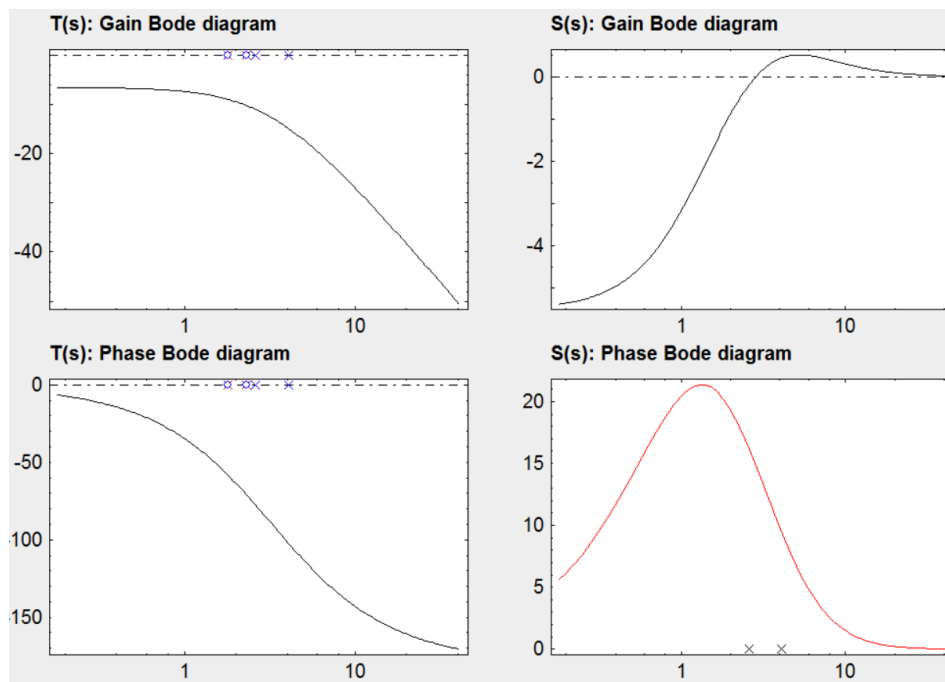


Figura 32: Diagrames de Bode de $T(s)$ i $S(s)$

3. Planta de segon ordre estable i grau relatiu 1

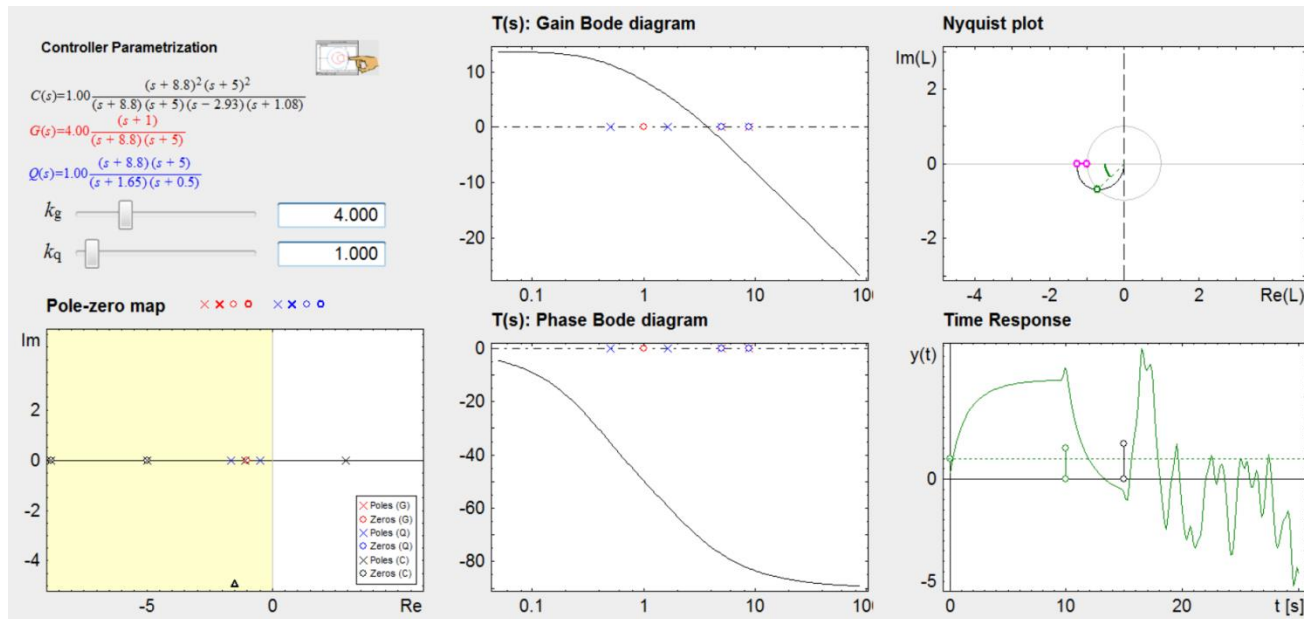


Figura 33: Interfície exemple 3

Sigui la planta i la transmitància $Q(s)$:

$$G(s) = \frac{4(s+1)}{(s+8,8)(s+5)}, \quad Q(s) = \frac{(s+5)(s+8,8)}{(s+1,65)(s+0,5)}$$

La funció de transferència de llaç tancat queda:

$$T(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1,65)(s+0,5)} = \frac{4(s+1)}{s^2 + 2,15s + 0,825} = \frac{4,848(s+1)}{\frac{s^2}{0,825} + \frac{2,15s}{0,825} + 1}$$

Com que la funció de llaç tancat té dues arrels reals negatives la resposta temporal serà sobre amortida. És a dir, el sistema equival a dos sistemes de primer ordre en cascada.

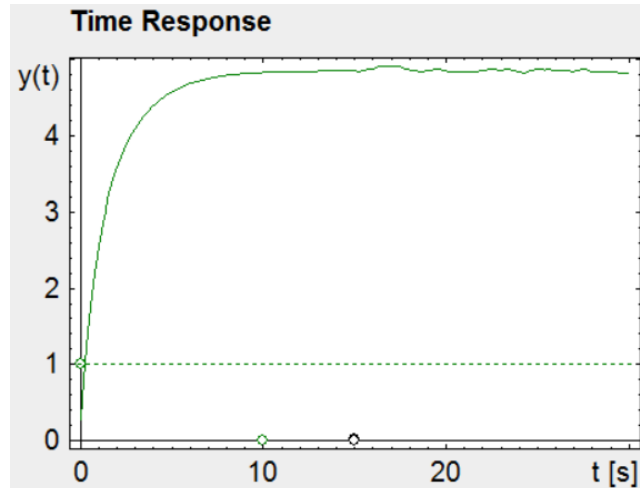


Figura 34: Resposta temporal amb consigna referència

Utilitzant el Teorema del Valor Final es calcula el valor al que tendeix la sortida quan el temps tendeix a infinit:

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4(s+1)}{s^2 + 2,15s + 0,825} = \frac{4}{0,825} = 4,85$$

Sent una entrada graó unitària, la sortida tendeix a **4,85**.

Mitjançant el TVF es calcula el valor que assolirà quan el temps tendeixi a infinit:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - Q(s)G(s))$$

$$G(0) = \frac{4}{8,8 \cdot 5} = 0,09, \quad Q(0) = \frac{8,8 \cdot 5}{1,65 \cdot 0,5} = 53,33$$

Per tant, l'error enfront a una entrada graó unitària és:

$$e_{ss} = s \frac{1}{s} (1 - 0,09 \cdot 53,33) = -3,8$$

el qual coincideix amb la diferència entre l'entrada i la sortida.

Si considerem la referència i el soroll nuls el sistema queda:

$$Y(s) = S(s)D_0(s) = \frac{(s-2,93)(s-1,08)}{(s+1,65)(s+0,5)} D_0(s) = \frac{s^2 - 1,85s - 3,175}{s^2 + 2,15s + 0,825} D_0(s)$$

Si fem entrar una entrada graó unitària per $D_0(s)$ la resposta en règim estacionari queda:

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 1,85s - 3,175}{s^2 + 2,15s + 0,825} = -\frac{3,175}{0,825} = -3,85$$

El valor de la sortida en règim estacionari després de l'entrada de la pertorbació és:

$$4,85 - 3,85 = 1$$

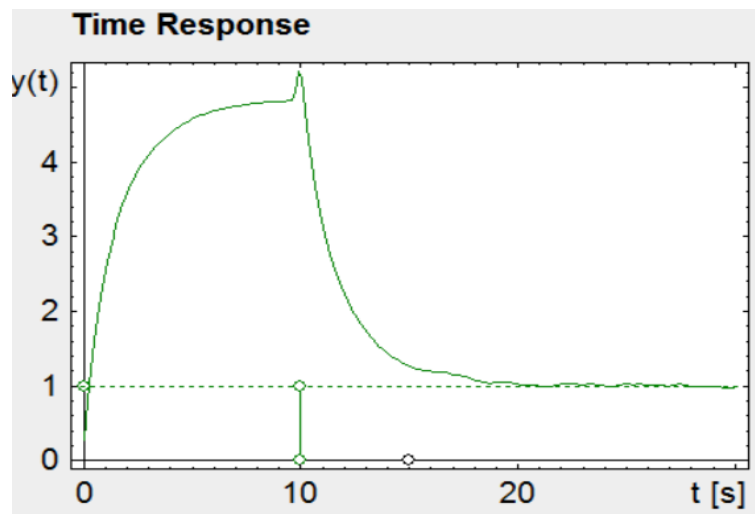


Figura 35: Resposta temporal amb referència + pertorbació

- Diagrama de Nyquist

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{(s + 8,8)(s + 0,5)}{(s - 2,93)(s + 1,08)} \cdot \frac{4(s + 1)}{(s + 8,8)(s + 5)} = \frac{4(s + 1)}{(s - 2,93)(s + 1,08)}$$

Utilitzant el criteri de Nyquist comprovem que el sistema és estable.

Tenim $P = 1$ i $N = -1$ i per tant $Z = 1 - 1 = 0$ i es comprova que el sistema és estable.

La línia de color lila ens marca el marge de guany. El cercle lila situat a l'extrem esquerra de la línia indica la freqüència en els 180 graus. El cercle situat a l'extrem dret de la línia indica el punt $(-1,0)$.

La ω_{180} és 0. Per aquesta freqüència el guany és 1,266. En conseqüència el $MG = \frac{1}{1,266} = 0,79$.

Per indicar el marge de fase de forma visual s'ha dibuixat un cercle de color verd fosc en el punt on el guany és unitari. A partir d'aquí es traça una línia discontinua també de color verd fosc des de l'origen fins aquest punt i seguidament es dibuixa un arc que indica el marge de fase. En aquest exemple el $MF = 47,73$.

- Diagrama de Bode $T(s)$

La funció de transferència és:

$$T(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1,65)(s+0,5)} = \frac{4,848(s+1)}{\frac{s^2}{0,825} + \frac{2,15s}{0,825} + 1}$$

Per tant, considerem un element constant i tres de primer ordre:

$$T_1(s) = 4,848, \quad T_2(s) = \frac{1}{\frac{s}{0,5} + 1}, \quad T_3(s) = s + 1, \quad T_4(s) = \frac{1}{\frac{s}{1,65} + 1}$$

La constant fa que el diagrama de Bode comenci amb una recta horitzontal a l'alçada de $\bar{M} = 20 \log 4,848 = 13,71$.

Dels tres elements de primer ordre es dedueix que a $\omega = 0,5$ la corba agafa un pendent de -20dB/dec, a $\omega = 1$ la corba té pendent 0 i a $\omega = 1,65$ tornar a agafar un pendent de -20dB/dec.

En el diagrama de fase s'observa que comença a 0 graus i acaba a 90. Té sentit perquè a partir de $\omega = 0,5$ la fase és de 90 graus però torna a 0 a causa de l'efecte del segon element. Finalment, a $\omega = 1,65$ la corba torna a tendir a 90 graus.

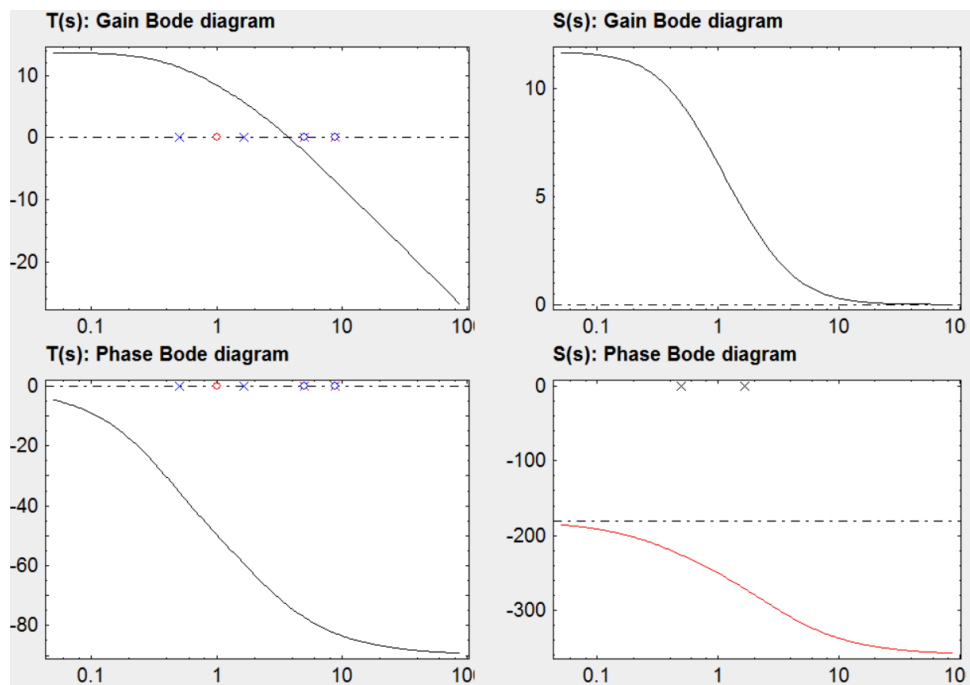


Figura 36: Diagrames de Bode de $T(s)$ i $S(s)$

4. Planta de segon ordre estable, grau relatiu 1 i no mínima fase

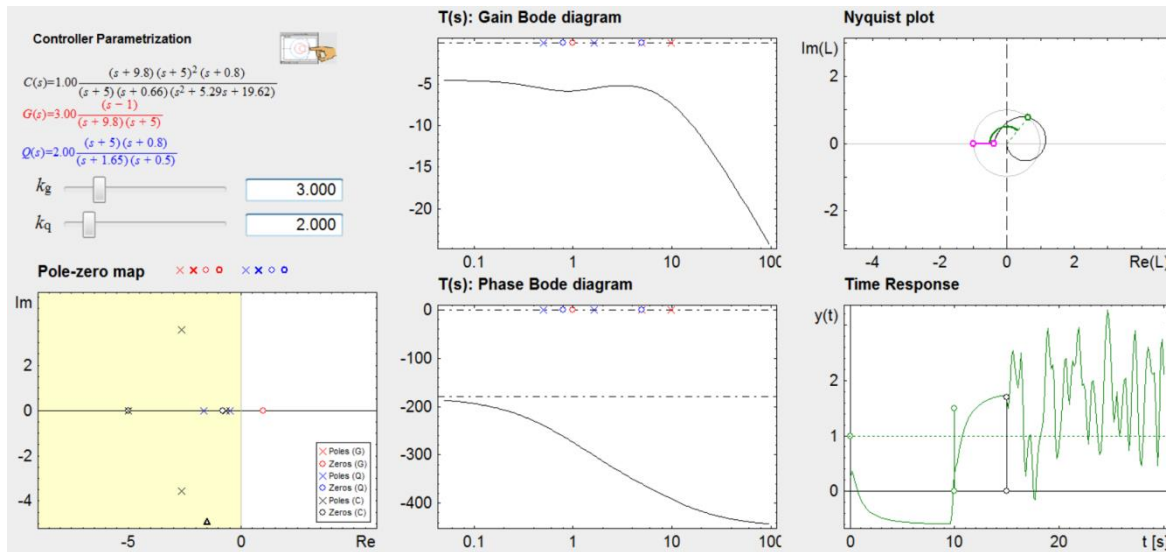


Figura 37: Interfície exemple 4

Segui la planta i la transmitància de $Q(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+9,8)(s+5)}, \quad Q(s) = \frac{(s+5)(s+9,8)}{(s+1,65)(s+0,5)}$$

La funció de transferència de llaç tancat queda:

$$T(s) = \frac{(s-1)}{(s+1,65)(s+0,5)} = \frac{(s-1)}{s^2 + 2,15s + 0,825} = \frac{1,21(s-1)}{\frac{s^2}{0,825} + \frac{2,15s}{0,825} + 1}$$

Com que la funció de llaç tancat té dues arrels reals negatives la resposta temporal serà sobre amortida. És a dir, el sistema equival a dos sistemes de primer ordre en cascada.

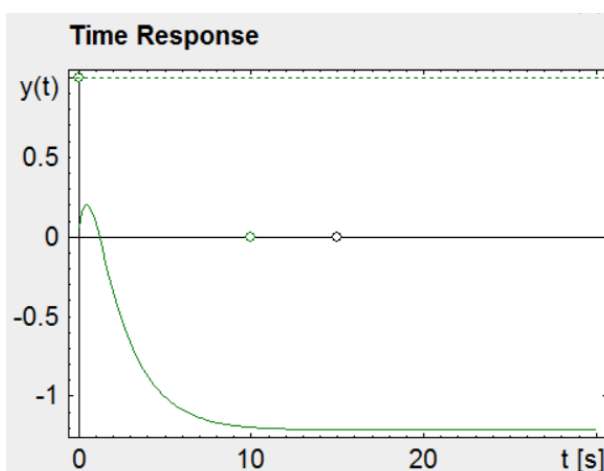


Figura 38: Resposta temporal amb consigna referència

Utilitzant el Teorema del Valor Final es calcula el valor al que tendeix la sortida quan el temps tendeix a infinit:

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s-1)}{s^2 + 2,15s + 0,825} = -\frac{1}{0,825} = -1,21$$

Sent una entrada graó unitària, la sortida tendeix a **-1,21**.

Suposant el soroll nul, l'error es calcula amb l'expressió

$$E(s) = R(s)S(s) = R(s)(1 - T(s)) = R(s)(1 - Q(s)G(s))$$

Mitjançant el TVF es calcula el valor que assolirà quan el temps tendeixi a infinit:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)(1 - Q(s)G(s))$$

$$G(0) = \frac{-1}{9,8 \cdot 5} = -0,02, \quad Q(0) = \frac{9,8 \cdot 5}{1,65 \cdot 0,5} = 59,4$$

Per tant, l'error enfront a una entrada graó unitària és:

$$e_{ss} = s \frac{1}{s} (1 - 0,02 * 59,4) = \mathbf{-0.188}.$$

el qual coincideix amb la diferència entre l'entrada i la sortida.

Si considerem la referència i el soroll nuls el sistema queda:

$$Y(s) = S(s)D_0(s) = \frac{s^2 + 1,15s + 1,82}{(s + 1,65)(s + 0,5)} D_0(s) = \frac{s^2 + 1,15s + 1,82}{s^2 + 2,15s + 0,825} D_0(s)$$

Si fem entrar una entrada graó unitari per $D_0(s)$ la resposta en règim estacionari queda:

$$y(\infty) = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 1,15s + 1,82}{s^2 + 2,15s + 0,825} = \frac{1,82}{0,825} = 2,21$$

El valor de la sortida en règim estacionari després de l'entrada de la pertorbació és:

$$2,21 - 1,21 = 1$$

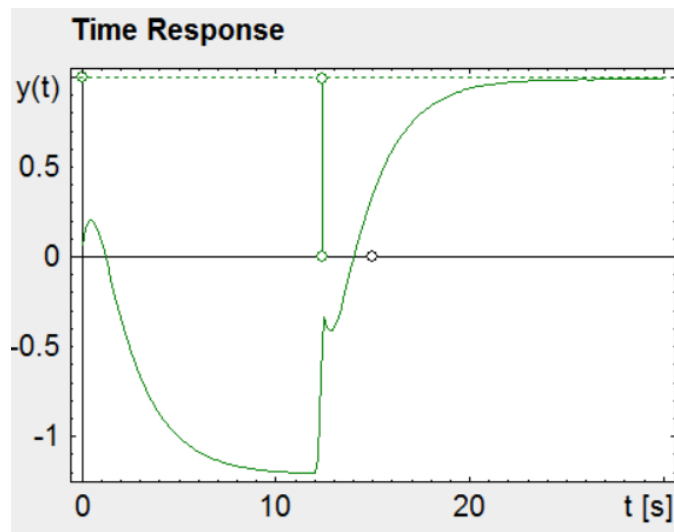


Figura 39: Resposta temporal amb referència + pertorbació

- Diagrama de Nyquist

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{(s + 9,8)(s + 0,5)}{s^2 + 1,15s + 1,82} \cdot \frac{(s - 1)}{(s + 9,8)(s + 5)} = \frac{(s - 1)}{s^2 + 1,15s + 1,82}$$

Utilitzant el criteri de Nyquist comprovem que el sistema és estable.

Tenim $P = 0$ i $N = 0$ i per tant $Z = 0$ i es comprova que el sistema és estable.

La línia de color lila ens marca el marge de guany. El cercle lila situat a l'extrem esquerra de la línia indica la freqüència en els 180 graus. El cercle situat a l'extrem dret de la línia indica el punt (-1,0).

La ω_{180} és 0. Per aquesta freqüència el guany és 0,548. En conseqüència el

$$MG = \frac{1}{0,548} = 1,825.$$

En aquest exemple el $MF = 99,49$ graus.

- Diagrama de Bode $T(s)$

La funció de transferència és:

$$T(s) = \frac{(s - 1)}{(s + 1,65)(s + 0,5)} = \frac{1,21(s - 1)}{\frac{s^2}{0,825} + \frac{2,15s}{0,825} + 1}$$

Per tant, considerem un element constant i tres de primer ordre.

$$T_1(s) = 1,21, \quad T_2(s) = \frac{1}{\frac{s}{0,5} + 1}, \quad T_3(s) = s - 1, \quad T_4(s) = \frac{1}{\frac{s}{1,65} + 1}$$

La constant fa que el diagrama de Bode comenci amb una recta horitzontal a l'alçada de $\bar{M} = 20 \log 1,21 = 1,66$.

Dels tres elements de primer ordre es dedueix que a $\omega = 0,5$ la corba agafa un pendent de -20dB/dec, a $\omega = 1$ la corba té pendent 0 i a $\omega = 1,65$ tornar a agafar un pendent de -20dB/dec.

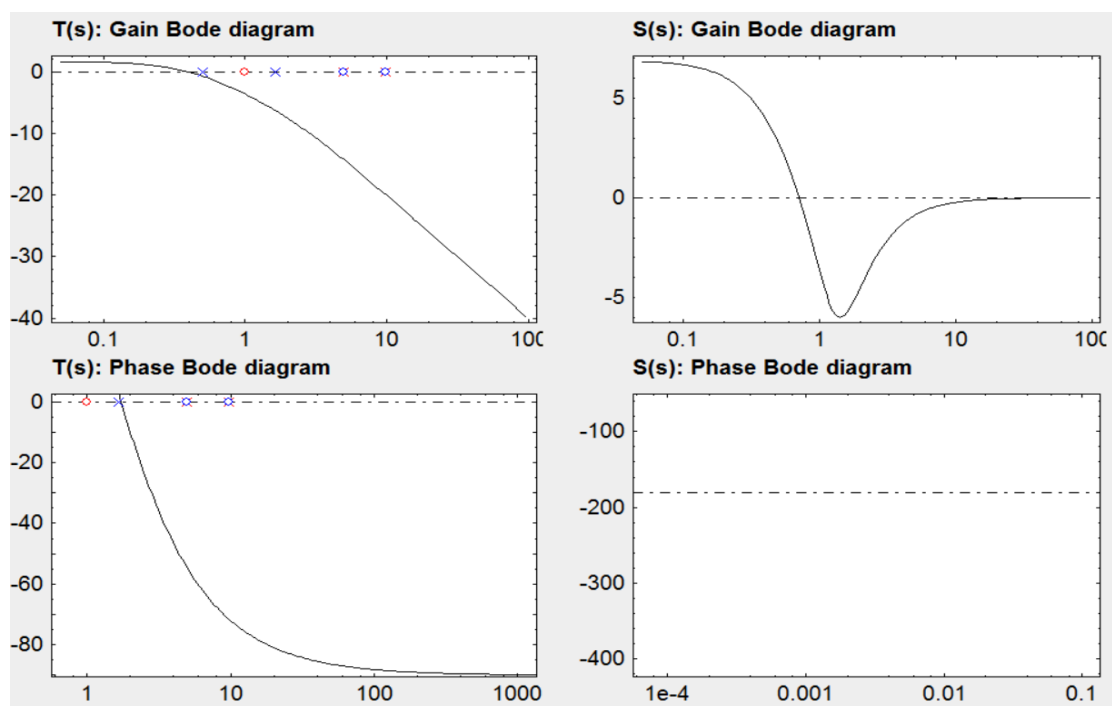


Figura 40: Diagrames de Bode de $T(s)$ i $S(s)$

9.2. Incertesa i Robustesa

9.2.1. Contingut teòric

El Control Robust és un tipus de sistema de control que assumeix l'existència d'incertesa o discrepàncies entre la planta real i el model matemàtic i ho inclou en el procés de disseny del sistema.

Tot seguit es presenten els dos conceptes claus per entendre aquest fenomen:

- **Incertesa:** és el conjunt de discrepàncies entre el model matemàtic i el sistema real.
- **Robustesa:** és la capacitat del sistema de control de satisfer les especificacions malgrat la incertesa.

Degut a la incertesa i per tant, la impossibilitat d'obtenir un model exacte d'un sistema real, s'intenta acotar aquesta incertesa definint una família de plantes. Aquesta conté el model nominal i també totes les plantes pertorbades a causa de la incertesa del model.

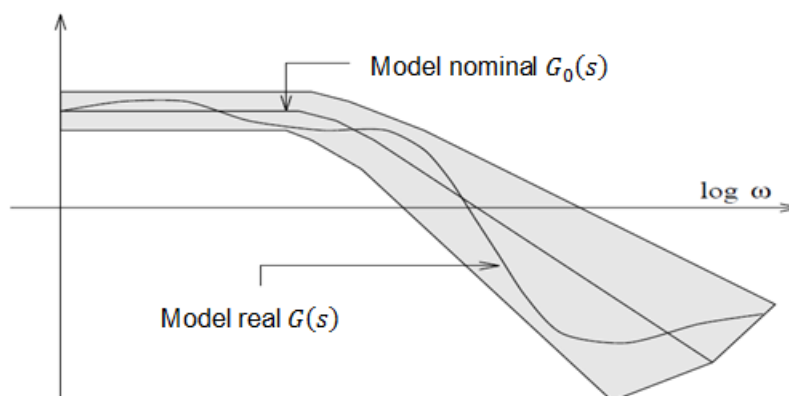


Figura 41: Família de plantes, diferència entre el model de la planta nominal i la planta real

En aquesta aplicació s'estudia el tipus d'incertesa multiplicativa (incertesa no estructurada) i la incertesa paramètrica (incertesa estructurada). A continuació, s'expliquen en què consisteixen els dos tipus d'incertesa i com aquestes es representen conjuntament en l'aplicació.

Incertesa multiplicativa

S'anomena $G_0(s)$ la funció de transferència de la planta nominal i $G(s)$ la funció de transferència de la planta pertorbada, és a dir, la planta real. L'equació que les relaciona, tenint en compte la incertesa multiplicativa, és la següent:

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)W(s)) \quad (\text{Eq. 25})$$

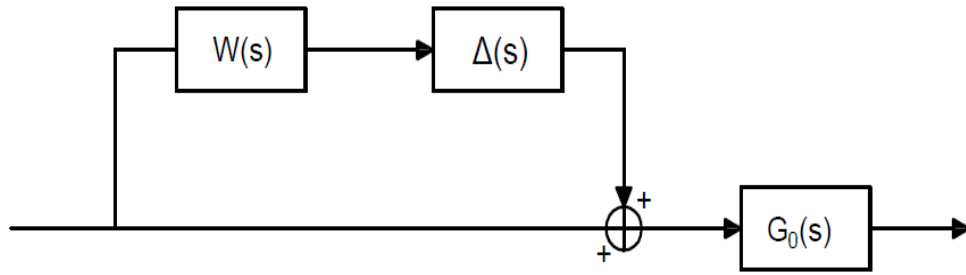


Figura 42: Diagrama de blocs de la incertesa multiplicativa

- La funció de pesat $W(s)$ descriu la dependència de la freqüència de la incertesa.
- La funció $\Delta(s)$ és qualsevol funció de transferència estable amb guany més petit que 1 per a totes les freqüències possibles.

De (Eq. 25) s'obté:

$$\frac{G(s)}{G_0(s)} - 1 = \Delta(s) \cdot W(s) \quad (\text{Eq. 26})$$

Per tant, si $\|\Delta\|_\infty < 1$:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (\text{Eq. 27})$$

$|W(j\omega)|$ proporciona la incertesa i normalment aquesta augmenta amb la freqüència. $|\Delta(j\omega)|$ actua com un factor d'escala de la magnitud de la pertorbació.

En aquesta aplicació, $W(s)$ té la següent expressió:

$$W(s) = k \cdot \frac{(\tau_2 \cdot s + 1)}{(\tau_1 \cdot s + 1)} \quad (\text{Eq. 28})$$

Incertesa Paramètrica

En aquesta aplicació el model de la planta és el següent:

$$G_0(s) = \frac{\alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad (\text{Eq. 29})$$

Considerem com a paràmetres incerts els quatre coeficients del numerador de $G_0(s)$:

$$\alpha_{1,min} \leq \bar{\alpha}_1 \leq \alpha_{1,max}, \quad \alpha_{2,min} \leq \bar{\alpha}_2 \leq \alpha_{2,max}$$

$$\alpha_{3,min} \leq \bar{\alpha}_3 \leq \alpha_{3,max}, \quad \alpha_{4,min} \leq \bar{\alpha}_4 \leq \alpha_{4,max}$$

On cada paràmetre α es defineix de la següent manera:

$$\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \text{ sent el seu valor nominal } \bar{\alpha}.$$

Representació de la incertesa en el domini freqüencial

Per a cada freqüència s'han dibuixat dos regions d'incertesa, una amb forma de polígon (incertesa paramètrica) i l'altra en forma de disc (incertesa multiplicativa).

- Aproximació disc: s'aproxima la regió d'incertesa mitjançant un cercle de radi $|W(j\omega_i)G_0(j\omega_i)|$ en cada freqüència ω_i , el centre del qual és $L(j\omega_i)$.
- Aproximació polígon: es dibuixen per a cada freqüència ω_i la part real i la part imaginària de $L(j\omega_i)$. Aquests polígons dibuixats en el pla de color vermell tenen com a vèrtexs 16 punts, els quals són la combinació dels mínims i màxims de cada coeficient α del numerador de $G_0(s)$. Hi ha quatre coeficients i, per cada coeficient, tenim un mínim i un màxim tot restant o sumant el marge d'error introduït com a *Dades_sistema.increment*. Per tant 2^4 ens dóna 16 possibles combinacions del numerador, els quals formen el polígon.

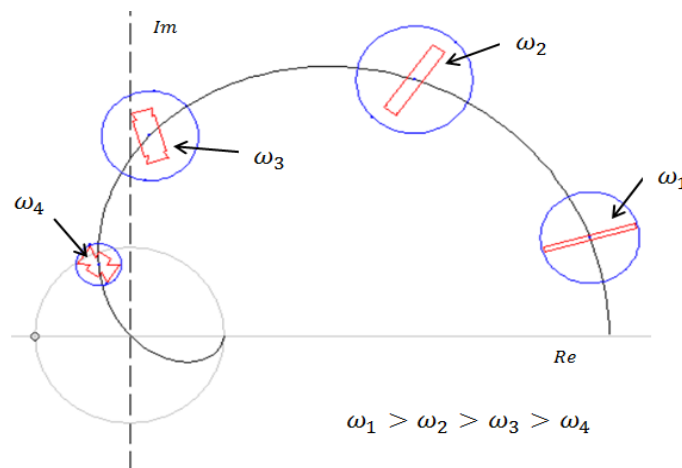


Figura 43: Representació de la incertesa per a cada freqüència

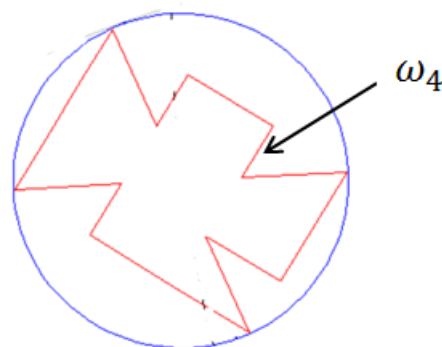


Figura 44: Aproximació Disc (línia blava) de la regió d'incertesa original (línia vermella)

L'avantatge de la representació de la incertesa multiplicativa per a cada freqüència és que les regions queden definides molt clarament i són molts visuals. A més a més, a la pràctica, són fàcils de dibuixar sobre la corba de Nyquist. No obstant això, té un inconvenient que és el conservadorisme ja que com es veu a la Figura 44, aproxima la regió d'incertesa original per un disc de dimensions superiors amb el qual perd precisió. No hi ha conservadorisme en el primer pas quan anem de la incertesa paramètrica descrita a la (Eq. 29) a la incertesa representada per polígons en la Figura 43.

S'espera que el radi vagi augmentant amb la freqüència, ja que és més fàcil determinar les característiques dels processos quan estan a prop de l'estabilitat. Això dona una banda d'incertesa respecte la resposta freqüencial de la planta nominal. Encara que els discos defineixen amb certa precisió la regió d'incertesa, els seus resultats s'usen en descripcions més conservatives de la seva descripció.

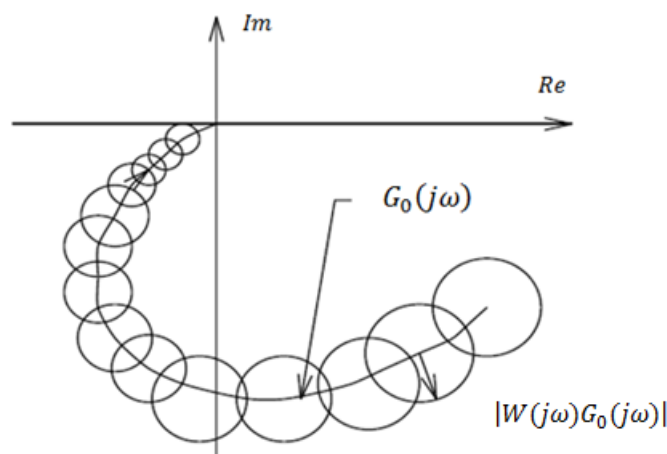


Figura 45: Diagrama de Nyquist d'un model amb incertesa multiplicativa

Per aquesta aplicació s'han utilitzat models nominals simples que es caracteritzen per ser d'ordre baix i no tenir retard. Els models simples simplifiquen el disseny de controladors però al mateix temps poden presentar amplies incerteses.

Quan s'analitza l'estabilitat robusta en el diagrama de Nyquist de llaç obert, assumim que $L(s)$ és estable, llavors la corba de Nyquist del sistema robust de llaç tancat no ha d'encerclar mai el punt -1 per qualsevol $G(s)$.

L'objectiu d'aquesta aplicació és estudiar l'estabilitat del sistema. Per analitzar l'estabilitat de la robustesa del model amb perturbació multiplicativa, es procedeix a fitar les traces dels diagrames de Nyquist. La traça pertorbada, és a dir, la de la planta real $G(s)$, segueix la

mateixa trajectòria que la traça de la planta nominal $G_0(s)$, però la pertorbació i el soroll provoca que la seva trajectòria es desviï de la traça de $G_0(s)$. Com a conseqüència, es decideix establir uns límits dins dels quals es desvia la traça de $G(s)$, però que en cap cas els sobrepassarà. Es tracta, doncs, de fitar les traces dels diagrames anomenats anteriorment amb l'objectiu d'indicar el límit d'estabilitat [8] [9].

Estabilitat Robusta (ER)

En aquest capítol es discuteixen les condicions que assegurin que el sistema roman estable per a totes les plantes del conjunt d'incertesa.

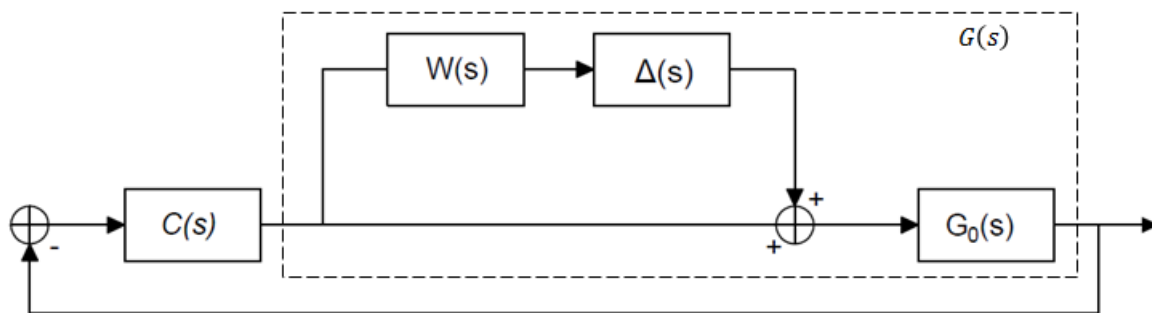


Figura 46: Sistema de laç tancat amb incertesa multiplicativa

Volem determinar l'estabilitat del sistema incert de laç tancat de la Figura 46 quan hi ha incertesa multiplicativa. Sempre assumirem, per característiques de disseny, l'estabilitat del sistema nominal de laç tancat. Si s'utilitza el criteri de Nyquist per comprovar l'estabilitat robusta del sistema:

$$ER \Leftrightarrow \text{Sistema estable } \forall L(s) \Leftrightarrow L(s) \text{ no ha d'encerclar el punt } -1 \quad \forall L(s)$$

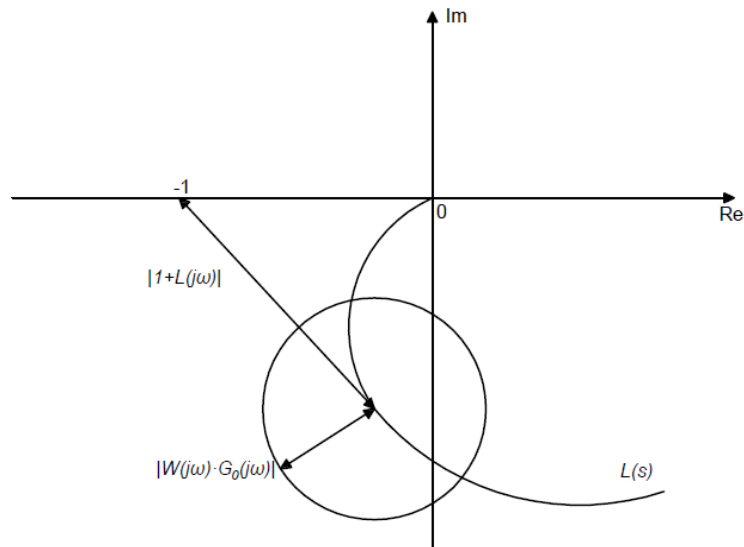


Figura 47: Distància al punt -1 i radi d'incertesa

Saben que $|1 + L|$ és la distància del punt -1 al centre del disc representat que és $L(j\omega_i)$ i que $|W(j\omega_i) \cdot G_0(j\omega_i)|$ és el radi del disc. El sistema roman estable si cap dels discos enciercla el punt -1. Per tant, de la Figura 7 es dedueix que:

$$|W(j\omega_i) \cdot G_0(j\omega_i)| < 1 \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad |W(j\omega_i) \cdot G_0(j\omega_i)| < |1 + L(j\omega_i)| \quad \forall \omega$$

Fent un resum dels conceptes clau :

- Un sistema sempre té incerteses, es disposa d'una família de plantes i s'escull un model nominal.
- Les especificacions es donen respecte les funcions de transferència de llaç tancat.
- Els objectius de control es defineixen progressivament com són: estabilitat nominal, comportament nominal, estabilitat robusta, comportament robust.
- Les incerteses poden definir-se de diferents maneres.

9.2.2. Pantalla

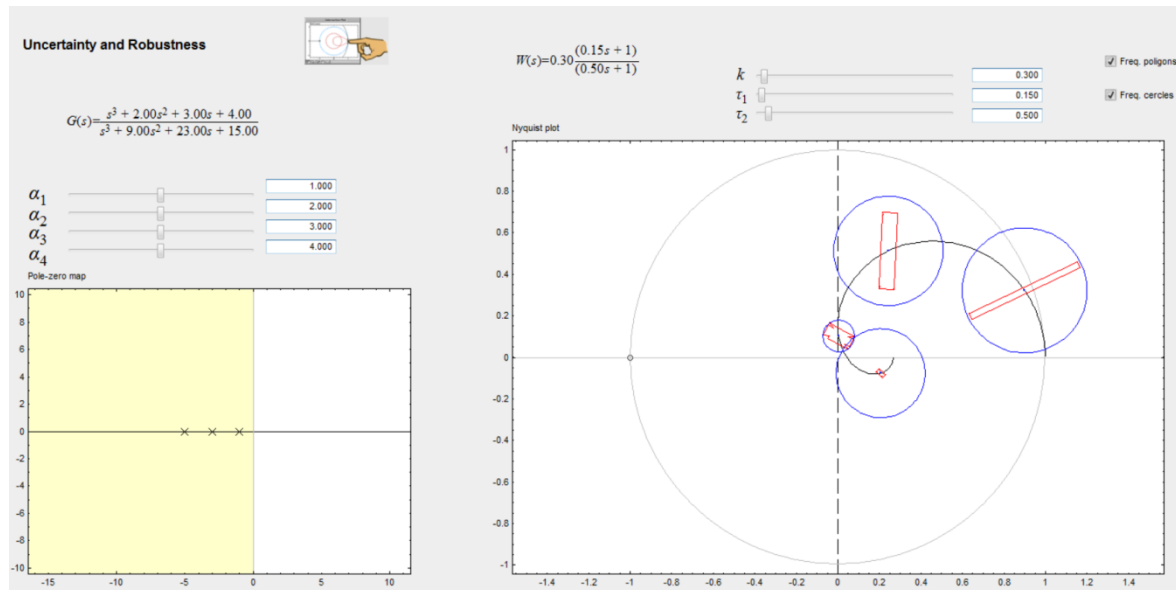


Figura 48: Figures que apareixen per pantalla

Figura Representació pols

En aquesta figura es representen els pols de la planta nominal $G_0(s)$ en el pla s . Els pols es mostren en forma de creu.

La zona pintada en groc correspon a valors de s de part real negativa.

Com en la primera aplicació, els pols són interactius i per tant l'usuari els pot arrossegat clicant a sobre d'ells amb el ratolí i això farà que els altres gràfics també canviïn de forma conforme els pols variïn el seu valor..

Selectors

Al costat dels valors dels paràmetres de la funció de pesat $W(s)$ s'observen dos selectors, les caselles dels quals poden estar activades (caselles marcades amb un tic) o desactivades (caselles en blanc). Cada selector té el següent significat:

- Freqüència Polígon: permet visualitzar la regió fitada provocada per la incertesa paramètrica per a quatre freqüències diferents en el diagrama de Nyquist.
- Freqüència Cercles: permet visualitzar la regió fitada provocada per la incertesa multiplicativa per a quatre freqüències diferents en el diagrama de Nyquist.

Paràmetres

Per pantalla es mostren els paràmetres de la funció nominal $G_0(s)$ i els de la funció de pesat $W(s)$.

- Funció nominal $G_0(s)$

Just a sobre de la figura de representació dels pols s'hi representen quatre sliders cadascun dels quals pertany a un valor del coeficient α del numerador de la planta $G_0(s)$. Cadascun d'aquests coeficients té un valor donat per l'usuari que es pot modificar quan aquest ho desitgi. Els quatre valors estan enregistrats com *Dades_sistema.alpha1*, *Dades_sistema.alpha2*, *Dades_sistema.alpha3* i *Dades_sistema.alpha4*. Els valors dels coeficients α estan compresos entre el seu valor nominal menys l'increment i el seu valor nominal més l'increment

- α_1 : és el coeficient d'ordre 3
- α_2 : és el coeficient d'ordre 2
- α_3 : és el coeficient d'ordre 1
- α_4 : és la constant del numerador

- Funció de pesat $W(s)$

Els paràmetres que es troben a sobre la figura de Nyquist pertanyen a la funció de transferència $W(s)$ i es defineixen com:

- k : guany canònic de la funció de pesat $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0.01 i 10.
- τ_1 : constant de temps del pol de $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0.01 i 10.
- τ_2 : constant de temps del zero de $W(s)$. El seu valor està comprès entre 0.01 i 10.

Tots els paràmetres estan associats a un slider amb el qual l'usuari modifica el seu valor. A més a més, a la part dreta de cada slider s'observa el valor exacte del paràmetre. En aquest sentit, també és possible introduir un valor concret clicant amb el botó esquerra del ratolí sobre el valor numèric i introduir el valor desitjat.

Figura Diagrama de Nyquist

El diagrama de Nyquist es dibuixa amb la funció que té incorporada el Sysquake amb el mateix nom: *nyquist(numerador, denominador, freqüència assignada)*. Aquesta funció representa a l'eix d'abscisses del gràfic la part real de la funció de transferència $G_0(s)$ per

cada valor de freqüència i la part imaginària a l'eix d'ordenades. La circumferència de color gris correspon a la circumferència unitat amb la qual veus quants cops el gràfic envolta el punt -1 que és la part rellevant del diagrama de Nyquist.

Quan s'activa la casella *Freqüència Cercles* es visualitzen 4 circumferències de color verd cadascuna de les qual pertany a una freqüència diferent. El valor nominal és el centre d'aquesta circumferència i aquests cercles delimiten la zona límit a la que pot variar la traça de Nyquist per a aquella freqüència determinada quan té lloc una pertorbació multiplicativa. Els punts que pertanyen a la corba nominal, que són el centre de cada circumferència, són interactius i per tant manipulables. L'usuari els pot arrossegar seguint la corba de Nyquist tot observant com varien els diàmetres de les circumferències. Quan s'està arrossegant la circumferència el valor de la freqüència es mostra a la part inferior esquerra de la pantalla.

Quan s'activa la casella *Freqüència Polígon* es visualitzen 4 polígons de color vermell cadascun dels quals pertany a una freqüència determinada. El valor nominal és el centre d'aquest políedre i aquests políedres delimiten la zona límit a la que pot variar la traça de Nyquist per a aquella freqüència determinada quan es modifica algun dels paràmetres incerts, en el nostre cas els coeficients α . Els punts que pertanyen al valor nominal, que són el centre de cada políedre, són interactius i per tant manipulables. L'usuari els pot arrossegar seguint la corba de Nyquist tot observant com varia la mida del polígon. Quan s'està arrossegant la circumferència el valor de la freqüència es mostra a la part inferior esquerra de la pantalla.

9.2.3. Exemples

Si es clica la pestanya *Info* de la barra superior de la pantalla, es poden observar varies opcions. Hi ha l'opció *Reset*, que fa referència a la configuració inicial quan s'executa l'aplicació, i també hi ha disponibles 2 exemples:

En els exemples es miren:

- Estabilitat Nominal: és el sistema de llaç tancat de $G_n(s)$ i $C(s)$ internament estable? Per a totes les s tal que $1 + G_n(s) \cdot C(s) = 0$, $\text{Re}(s) < 0$.
- Estabilitat Robusta: és el sistema de llaç tancat de $G(s)$ i $C(s)$ estable per a qualsevol $G(s)$?

L'aplicació consta de dos exemples: un sistema de primer ordre i un altre de segon ordre.

En cada freqüència, una regió de números complexos $G_0(s)$ és generada quan els

paràmetres del model varien dins de la seva regió d'incertesa. El model de la planta nominal és:

$$G(s) = \frac{\alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$$

amb quatre paràmetres incerts, els quals corresponen als coeficients de cada terme del numerador.

$$\alpha_{1,min} \leq \overline{\alpha_1} \leq \alpha_{1,max}, \quad \alpha_{2,min} \leq \overline{\alpha_2} \leq \alpha_{2,max}$$

$$\alpha_{3,min} \leq \overline{\alpha_3} \leq \alpha_{3,max}, \quad \alpha_{4,min} \leq \overline{\alpha_4} \leq \alpha_{4,max}$$

Exemple 1

Es vol estudiar l'estabilitat robusta del següent model inicial, tenint en compte la seva incertesa paramètrica i multiplicativa:

$$G_0(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{(s + 1)(s + 3)(s + 5)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

On

$$\alpha_1 \in [0,7,1,3]; \quad \overline{\alpha_1} = 1$$

$$\alpha_2 \in [1,7,2,3]; \quad \overline{\alpha_2} = 2$$

$$\alpha_3 \in [2,7,3,3]; \quad \overline{\alpha_3} = 3$$

$$\alpha_0 \in [3,7,4,3]; \quad \overline{\alpha_0} = 4$$

Hem considerat una marge d'incertesa, $\Delta_i = 0,3$ per a cadascun dels paràmetres α .

El model matemàtic d'incertesa multiplicativa és el següent:

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)W(s))$$

I la seva funció de pesat és:

$$W(s) = 0,3 \frac{(0,15s + 1)}{(0,5s + 1)}$$

En cada freqüència una regió de nombres complexos és generada variant els valors quatre paràmetres de la planta $G(s)$. Aquestes regions d'incertesa tenen formes complexes i descripcions matemàtiques complexes. Per aquest motiu, s'aproximen aquestes regions

complexes com cercles o discs com es mostra a la Figura 49.

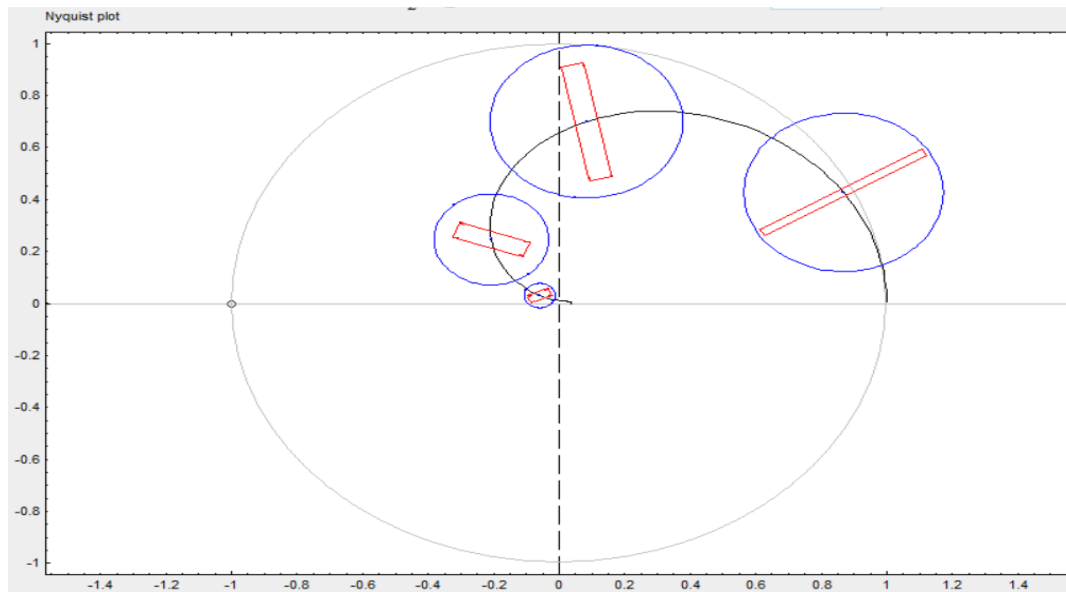


Figura 49: Representació de la incertesa en el diagrama de Nyquist

La incertesa paramètrica es representa mitjançant pertorbacions complexes. Això té l'avantatge de simplificar l'anàlisi.

A continuació es presenta una taula amb el guany de la planta nominal i la funció de pesat, i el radi del disc d'incertesa per a les quatre freqüències estudiades.

Freqüència ω_i (rad/s)	$ W(j\omega_i) $	$ G_0(j\omega_i) $	$ W(j\omega_i)G_0(j\omega_i) $
0,5	0,854	0.065	0.056
2	0.667	0.2	0.133
5	0.464	0.567	0.262
20	0.31	0.96	0.298

Observant la taula anterior, es conclou que el radi que fa referència a la incertesa en cada freqüència és proporcional a l'augment de la freqüència.

Estabilitat Nominal i Robusta

Jugant una mica amb el diagrama de pols i zeros de l'aplicació podem variar la corba de Nyquist fins a arribar a un punt on el disc d'incertesa encercla el punt -1 i per tant el sistema de llaç tancat passa de ser estable a ser inestable per a alguna combinació dels paràmetres

incerts. És important recordar que, en aquest cas, el llaç tancat nominal segueix sent estable.

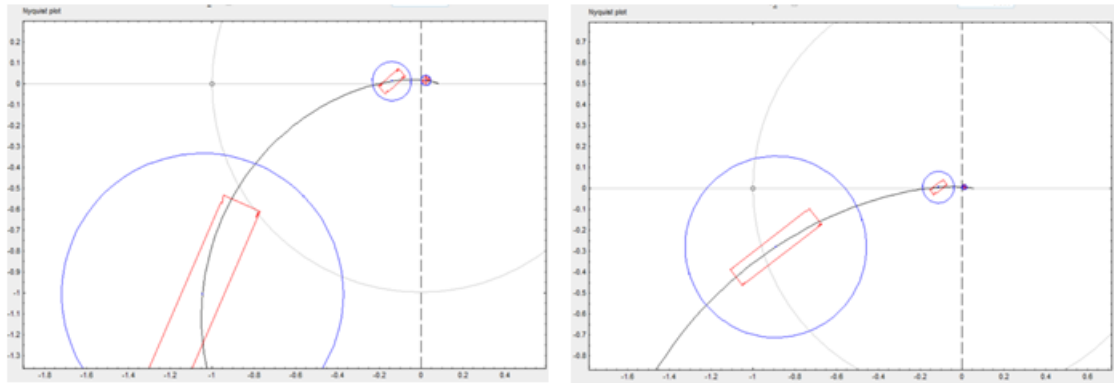


Figura 50: Sistema amb incertesa multiplicativa inestable

En el moment en que el disc d'incertesa multiplicativa encercla el punt -1 la planta té la forma següent:

$$G_0(s) = \frac{1.27s^3 + 2.28s^2 + 3.12s + 4.26}{s^3 - 0.9s^2 + 50.82s + 77} = \frac{1.27s^3 + 2.28s^2 + 3.12s + 4.26}{(s + 1.16 + 7.26j)(s + 1.16 - 7.26j)(s + 1.42)}$$

Variant els paràmetres α s'observa com la regió d'incertesa paramètrica també encercla el punt -1. Això significa que per algunes determinades combinacions dels paràmetres α el llaç tancat es torna inestable i per tant no es compleix el criteri d'estabilitat robusta que diu que la regió d'incertesa no ha d'encerclar el punt -1 si volem que la família de plantes segueixi sent estable.

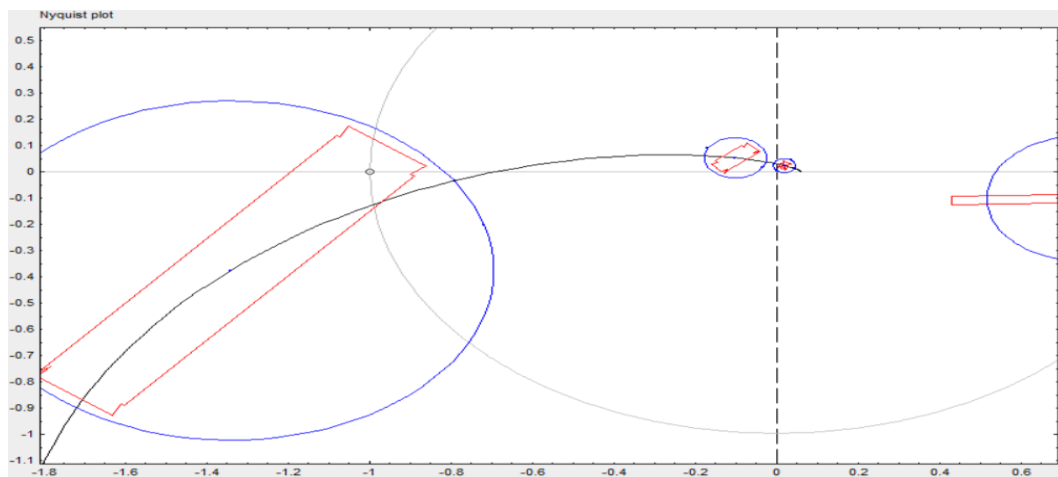


Figura 51: Sistema amb incertesa paramètrica inestable

En aquest moment el model de la plant és:

$$G(s) = \frac{0.7s^3 + 2.21s^2 + 3s + 4}{(s + 0.6 + 5.9j)(s + 0.6 - 5.9j)(s + 1.85)} = \frac{0.7s^3 + 2.21s^2 + 3s + 4}{s^3 + 0.64s^2 + 33.04s + 65.43}$$

Exemple 2

Es vol estudiar l'estabilitat robusta del següent model inicial, tenint en compte la seva incertesa paramètrica i multiplicativa.

$$G(s) = \frac{5s^3 + 5s^2 + 5s + 5}{(s + 1)(s + 2)(s + 2.56)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 5.56s^2 + 9.68s + 5.12}$$

On

$$\alpha_1 \in [4.5, 5.5]; \overline{\alpha_1} = 5$$

$$\alpha_2 \in [4.5, 5.5]; \overline{\alpha_2} = 5$$

$$\alpha_3 \in [4.5, 5.5]; \overline{\alpha_3} = 5$$

$$\alpha_0 \in [4.5, 5.5]; \overline{\alpha_0} = 5$$

Hem considerat una marge d'incertesa, $\Delta_i = 0.5$ per a cadascun dels paràmetres α .

El model matemàtic d'incertesa multiplicativa és el següent:

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)W(s))$$

I la seva funció de pesat és:

$$W(s) = 0.3 \frac{(0.15s + 1)}{(0.5s + 1)}$$

En cada freqüència una regió de nombres complexos és generada variant els quatre paràmetres de la planta $G(s)$. Aquestes regions d'incertesa tenen formes complexes i descripcions matemàtiques complexes. Per aquest motiu, s'aproximen aquestes regions complexes com cercles o discs com es mostra a la Figura 12.

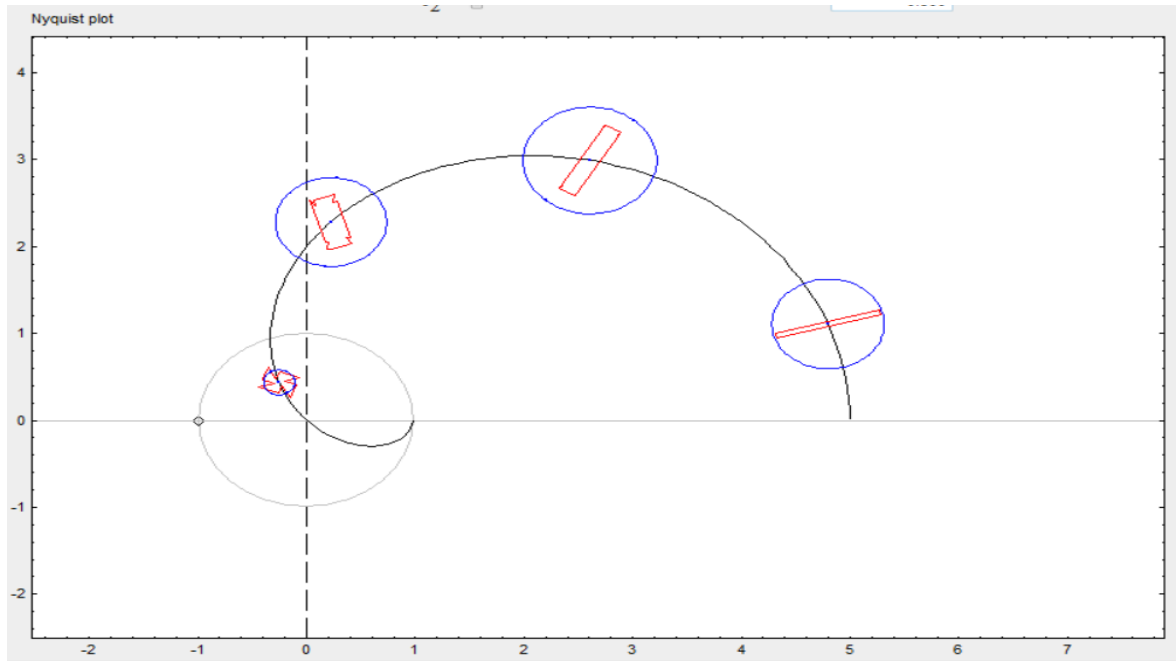


Figura 52: Sistema amb incertesa paramètrica inestable

A continuació es presenta una taula amb el guany de la planta nominal i la funció de pesat, i el radi del disc d'incertesa per a les quatre freqüències estudiades.

Freqüència ω_i (rad/s)	$ W(j\omega_i) $	$ G_0(j\omega_i) $	$ W(j\omega_i)G_0(j\omega_i) $
1.3	0,285	0.504	0.143
2	0.222	2.291	0.509
5	0.155	3.967	0.614
20	0.105	4.923	0.513

Si ens centrem en la regió d'incertesa en $\omega = 2 \text{ rad/s}$

$$|1 + G(j\omega)| = 1 - 0.5037 = 0.4963$$

Les coordenades del punt de la corba de Nyquist per aquesta freqüència són:

$$re = -0.2523, \quad im = 0.4360$$

Aplicant el Teorema de Pitagores es pot calcular la distància al punt -1:

$$(\text{distància al punt } -1) = \sqrt{-0.2523^2 + 0.4360^2} = 0.5037$$

la qual coincideix amb l'obtinguda anteriorment.

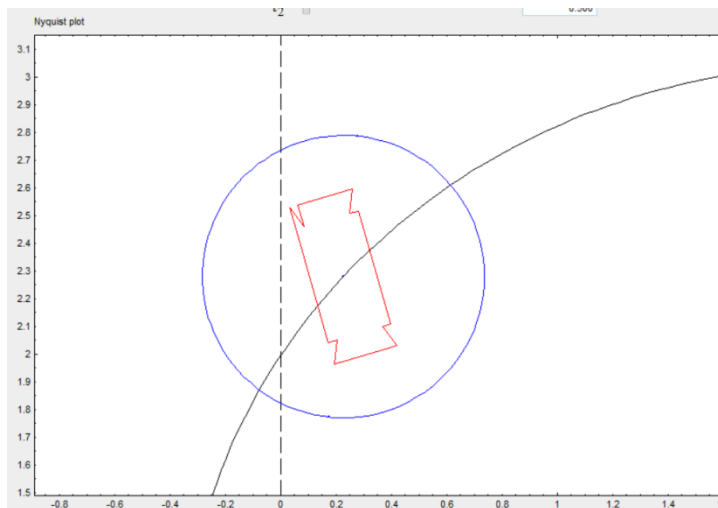


Figura 53: Regió d'incertesa a la freqüència $\omega = 2 \text{ rad/s}$

La regió d'incertesa paramètrica (polígon vermell) s'ha obtingut de la següent manera:

Per cada component α tenim un marge d'incertesa de ± 0.3 .

Valors dels coeficients α	Part real	Part imaginaria
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,min}]$	0.2034	2.05
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,max}]$	0.398	2.109
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,min}]$	0.226	1.97
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,min}]$	0.1723	2.04
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,min}]$	0.2486	2.508
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,max}]$	0.0626	2.54
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,max}]$	0.2572	2.595
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,min}]$	0.42	2.03
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,min}]$	0.195	1.965
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,max}]$	0.085	2.46
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,max}]$	0.031	2.53
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,min}]$	0.367	2.1
$[\alpha_{0,min}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,max}]$	0.279	2.5173
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,min}]$	0.389	2.0217
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,min}, \alpha_{2,max}, \alpha_{3,max}]$	0.226	2.5861
$[\alpha_{0,max}, \alpha_{1,max}, \alpha_{2,min}, \alpha_{3,max}]$	0.054	2.4519

Aquestes són les 16 combinacions esmentades a la part de la teoria i unint els 16 vèrtexs entre ells queda definida la regió d'incertesa paramètrica, la qual es descriu amb un polígon vermell a l'aplicació.

10. Estudi d'Impacte Ambiental

En tot projecte és necessari identificar i analitzar quin és el seu impacte ambiental per així poder valorar els seus efectes, doncs és important ser conscient de tots els recursos naturals que es consumeixen en un projecte d'aquestes característiques i d'aquesta manera intentar reduir la producció de residus o incentivar l'ús de recursos sostenibles.

L'impacte mediambiental d'aquest projecte és pràcticament negligible ja que l'objectiu ha estat crear aplicacions amb el programa informàtic Sysquake i per tant no s'ha fet servir cap material que pugui tenir un impacte ambiental amb l'exterior com per exemple: produir residus o reduir recursos naturals. Només caldria destacar l'ús de consumibles ofimàtics, com per exemple el paper o la tinta d'impressora que han sigut necessaris per disposar d'articles i documentació a partir dels quals s'han creat algunes aplicacions, a més del consum elèctric habitual del treball d'un ordinador personal.

10.1. Impacte ambiental en la realització del projecte

Donada la naturalesa d'aquest projecte, el qual ha consistit en crear diverses aplicacions interactives i les seves respectives fitxes en format digital, es pot afirmar que aquest no té implicacions estretament relacionades amb l'impacte ambiental. Per tant, només cal destacar el consum d'energia elèctrica de l'ordinador personal utilitzat durant el procés de creació de les aplicacions i les fitxes. També es pot considerar l'ús de paper o la tinta de la impressora, que han sigut necessaris per disposar d'articles i documentació a partir dels quals s'han creat algunes aplicacions.

10.2. Impacte ambiental en la posada en pràctica del projecte

Tal i com s'ha comentat a l'apartat anterior, es tracta d'un projecte de característiques informàtiques i això provoca que tingui un impacte ambiental baix. Per a la posada en pràctica del present projecte, l'impacte ambiental és gairebé el mateix que per a la realització d'aquest, ja que cada usuari només necessita un ordinador per treballar amb les aplicacions interactives. Així doncs, només es considera el consum elèctric de l'ordinador personal que fa servir l'usuari.

11. Estudi Econòmic

Per tal de calcular el pressupost del projecte s'ha cregut convenient dividir-lo en dos parts: la primera té en compte les despeses que s'han dut a terme durant la realització del projecte i la segona té en compte tot el que hom necessita adquirir per a poder iniciar un projecte d'aquestes característiques. A continuació es fa un anàlisi de viabilitat per aquests dos blocs:

11.1. Pressupost de la realització del projecte

La realització del projecte inclou despeses de personal que són les hores que l'autor ha dedicat a l'elaboració del projecte. El conjunt d'aquestes d'hores engloba diverses tasques dutes a terme i que són les següents:

- Aprenentatge de l'ús del programa informàtic *Sysquake*.
- Elaboració de les aplicacions interactives: inclou les tasques de disseny, programació (implementació) i documentació (redactar les fitxes per a l'usuari).
- Redacció de la memòria.

Per a fixar la remuneració de les hores treballades s'han tingut en compte les següents consideracions:

- Projecte realitzat per un estudiant com a assignatura obligatòria
- Projecte realitzat a temps parcial
- Projecte de l'àmbit de l'enginyeria

El primer i el segon punt comporten que l'estudiant cobri un ajut a l'estudi fixat per la Universitat a la qual pertany, en aquest cas la UPC. El tercer punt matisa que l'estudiant ha de cobrar un salari adient al camp de recerca el qual pertany ja que els ajuts a l'estudi depenen de la seva branca. Per a tot això, s'ha considerat un preu de 8€ l'hora que correspon al preu orientatiu que l'ETSEIB fixa en concepte d'ajut a l'estudi als estudiants en conveni de cooperació educativa amb empreses.

D'altra banda, es té en compte tota la compra de material com pot ser el paper, impressions, la tinta d'impressora, així com també les despeses de l'enquadració del projecte. En la taula, totes aquestes s'anomenen despeses de material d'oficina.

També cal recordar l'ús de l'ordinador personal mitjançant el qual s'han creat les aplicacions interactives i s'ha redactat tota la documentació. No obstant això, l'ordinador s'avalua com a despesa d'amortització, ja que la compra d'aquest no va ser exclusivament per a la realització del treball. S'ha considerat una amortització del 38%, doncs s'ha requerit aproximadament uns 8 mesos per realitzar el projecte i la vida útil de l'ordinador seria d'un any i 9 mesos.

Per últim, cal considerar les despeses de transport pels desplaçaments fets per les tutories. En aquest cas en concret, les tutories s'han dut a terme al despatx del tutor que està ubicat a la Facultat de Matemàtiques i Estadística just a sota de l'ETSEIB. Tenint en compte que l'autor viu dintre de la zona 1 de la xarxa de TMB es calcular el cost com el nombre de targetes T-10 usades únicament pels desplaçaments.

Concepte			
Despeses Personal	[h]	[€/h]	Total [€]
Aprenentatge programa	40	8	320
Elaboració aplicacions interactives			
Disseny	100	8	800
Implementació	350	8	2800
Fitxes	230	8	1840
Redacció memòria	120	8	960
Total despeses personal			6720
Despeses materials	Amortització	[€]	Total [€]
Material d'oficina	1	80	80
Amortització ordinador	0,2	900	180
Total despeses materials			260
Despeses transport	No. T-10	Preu T-10	Total [€]
Desplaçament per a tutories	4	9,95	39,8
Total despeses transport			39,8
TOTAL [€]			7019,8

Taula 2: Partides pressupostaries

11.2. Pressupost de la posada en pràctica del projecte

Per a poder iniciar qualsevol projecte és indispensable disposar d'un pressupost inicial que és el que ens donarà una idea general del cost que suposarà l'adquisició de tot el material necessari per posar-lo en marxa.

Per aquest projecte en concret a part d'un ordinador serà necessari el programa Sysquake per a programar les aplicacions. Partint de la base que aquestes aplicacions tracten conceptes molt específics d'una determinada branca de l'enginyeria, i amb això s'entén que els seus usuaris molt probablement ja disposaran d'un ordinador en el seu dia dia com també en disposen les escoles o universitats que volguessin adquirir aquest producte de cara a l'ensenyament. Per tant, en el pressupost només es computaran les despeses d'adquisició del programa, el qual es pot adquirir directament des de la pàgina web (www.calerga.com) del seu distribuïdor (*Calerga Sarl*).

El preu de venda del programa *Sysquake* varia en funció de qui sigui el comprador (escoles/universitats o comprador independent), ja que diferencia entre si és per ús acadèmic o per un ús personal. També varia segons el nombre de llicències adquirides, en aquest cas si n'adquireixes una o cinc, i segons si es compra en format CD o es descarrega directament des de la pàgina web.

A la pàgina web del distribuïdor el preu està en Suïssos Francs. S'ha procedit a fer el canvi de moneda mitjançant el convertidor de Yahoo (<http://finance.yahoo.com/currency-converter>) el dia 10/01/2017. No hem d'oblidar que el preu en Euros serà un preu orientatiu ja que està subjecte a les possibles fluctuacions en les monedes corresponents.

A continuació s'indiquen els diferents preus de venda en format taula:

	CD				Descàrrega	
	1 llicència (1 Ordinador)		5 llicències (5 ordinadors)			
	CHF	EUR	CHF	EUR	CHF	EUR
Comprador independent	2500 CHF	2.307,57 €	7500 CHF	6.922,72 €	2250 CHF	2.076,82 €
Col·legis / Universitats	1000 CHF	923,03 €	3000 CHF	2.769,09 €	900 CHF	830,73 €

Taula 3: Preus de venda del programa Sysquake

Font: www.calerga.com

Conclusions

En els últims anys s'ha produït una revolució pel que fa els mètodes d'aprenentatge de la teoria de control automàtic. Els resultats més significatius són la proliferació de nombrosos laboratoris virtuals i aplicacions gràfiques que exploten la interactivitat i la visualització geomètrica. Aquestes eines són de gran rellevància com a ajuda a les classes presencials de tota la vida o també com a eina d'aprenentatge autònoma pels estudiants a distància. En aquest sentit, s'ha presentat el programa *SysQuake* com a una possible alternativa en la implementació d'aquestes eines.

Els procediments clàssics de disseny contenen nombroses simplificacions i hipòtesis que fan més fàcil la creació de controladors. La introducció d'aquests conceptes pot ser difícil des d'un punt de vista analític. Per aquesta raó, la representació gràfica i la interactivitat poden ser gran ajuda en aquests casos.

Aquest treball presenta un conjunt d'aplicacions interactives per l'estudi de sistemes SISO amb incertesa i controladors parametritzats.

Hem vist com la parametrització de Youla, introduïda per Youla l'any 1976) permet establir un sistema realimentat només tenint en compte les especificacions del controlador. Això fa que el focus de l'estudi es redueixi significativament, i, combinat amb una eina com *Sysquake* et brinda l'oportunitat d'aprofundir més en el tema. S'ha intentat enllaçar la teoria amb aplicacions pràctiques.

El control robust és un dels principals àmbits de recerca de la teoria moderna de control. Val a dir que moltes de les investigacions i recerca relacionades amb l'anàlisi robust es van dur a terme als anys 80. En aquest treball s'intenta contraposar la incertesa no estructurada amb la incertesa estructurada, aquest última força més complexa i de la qual és difícil trobar tant material publicat com de la primera. Per aquesta raó, s'ha volgut aportar més facilitats en l'àmbit de la recerca, tot i que encara queda molt de treball per endavant.

Per últim, cal destacar que el camp de la teoria de control és molt ampli i disposa d'un gran ventall de conceptes que poden ser tractats amb la interactivitat i que, per tant, aquestes aplicacions interactives creades només són una petita contribució al material docent que es fa servir en aquest camp.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor del projecte, en Ramon Costa-Castelló, la seva confiança dipositada en mi per tal de poder realitzar aquest projecte i la seva dedicació i paciència durant aquests sis mesos de feina.

També vull agrair als meus pares i als meus dos germans, la Gemma i en Pol, per tot el suport i força rebuda al llarg d'aquest trajecte que ha durat el Grau. Gràcies per confiar sempre en mi i estar al meu costat tant en els bons moments com en els no tant bons.

Per últim agrair als meus amics per haver-me fet passar moments inoblidables i haver-me donat forces per seguir en els moments difícils i poder gaudir del final d'aquesta etapa fantàstica de les nostres vides junts.

Bibliografia

Referències bibliogràfiques

- [1] LANGOYO MENASANCH, MARIA. *Disseny d'aplicacions interactives en la teoria de control*. Projecte de Fi de Carrera, Universitat Politècnica de Catalunya, juny 2014.
- [2] FÀBREGAS CORNELLÀ, JOSEP. *Aplicacions interactives per a la docència de teoria de sistemes lineals*. Projecte de Fi de Carrera, Universitat Politècnica de Catalunya, maig 2007.
- [3] PIQUET, Y., Sysquake User Manual, Calerga Sarl.
[http://www.calerga.com/doc/SQ4_main.htm, 31 de juliol de 2014]
- [4] J. L. GUZMAN, S. DORMIDO, M. BERENGUEL. *Interactivity in Education: An Experience in the Automatic Control Field*. Volume 21, Issue 2.
- [5] RICARDO S. SÁNCHEZ-PEÑA, MARIO SZNAIER, *Robust Systems-Theory and Applications*, 1998. Capítols: 2, 3, 4, 7.
- [6] SIGURD SKOGESTAD, IAN POSTLETHWAITE, *Multivariable Feedback Control-Analysis and Design, second edition 2005*. Capítols 2, 3, 4, 5, 7.
- [7] G. GOODWIN, S. GRAEBE, M. SALGADO, *Control System Design, 2000*. Blocs: 2, 3, 5.
- [8] S. DORMIDO BENCOMO. *Control Learning: present and future*. Volume 28, Issue 1.
- [9] JOHN DOYLE, BRUCE A. FRANCIS, ALLEN R. TANNENBAUM. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., 1990. Capítols 4, 5, 6, 7, 11, 12.
- [10] KEMIN ZHOU, JOHN C. DOYLE, *Essentials of Robust Control*, 1999. Capítols: 5, 6, 8, 11.
- [11] BENJAMIN C. KUO, *Sistemas de Control Automático, séptima edición*. Capítols: 7, 9, 10, 11